$-[t+\frac{1}{t}-(t-\frac{1}{t})\ln t]x(t>1)$，关于 x 的不等式 $f(x)\leqslant g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，则实数 m 的取值范围为 $[\frac{1}{t}-t,0)\cup(0,t-\frac{1}{t}]$.

证明类似于解法二，限于篇幅，此处略去.

4. 解题教学感悟

目前，核心素养已成为基础教育领域的重点研究课题和学生发展的主要任务[1]. 数学核心素养形成与提升不能离开数学的学习、运用、创新，在学校中培养学生的数学核心素养必须以课堂教学为载体.

那么，在解题教学中如何培养学生的数学核心素养？

在试题解答策略分析环节，通过各种策略的比较、各类数学模型的应用、算理与算法的甄别、数学软件与多媒体的动态演示，能够很好培养学生数学抽象、直观想象、数学建模、数学运算、数据分析等核心素养. 在命题手法剖析环节，在教师的引导下，学生通过试题表现出来的“蛛丝马迹”，“顺藤摸瓜”发现命题者的命题手法，学生的逻辑推理核心素养能够得到很好的发展. 在试题拓展探析环节，通过合情推理，将试题从特殊到一般推广，有助于发展学生的逻辑推理核心素养、创新思维能力.

参考文献

[1] 任子朝，陈昂，赵轩. 数学核心素养评价研究[J]，课程·教材·教法，2018，38(5)：116－121.

一道 2021 年高考压轴题的多视角探究

福建师范大学数学与信息学院　(350117)　束浩东*

近年来全国高考和各地的模考试卷中频频出现导数的极值点偏移问题，该类型试题通常以压轴题的形式出现，对考生的数学思维能力和基本功要求较高. 文章以 2021 年新高考数学 1 卷的压轴题为例，对一类极值点偏移问题进行了多解探究，总结了证明此类问题的常见方法和思路，在此基础之上对该题的“母题”进行了优化证明.

1　原题再现

(2021 年新高考数学 1 卷第 22 题) 已知函数 $f(x)=x(1-\ln x)$. (Ⅰ) 讨论 $f(x)$ 的单调性；(Ⅱ) 设 a,b 为两个不相等的正数，且 $b\ln a-a\ln b=a-b$. 证明：$2<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<e$.

2　试题解析

问题(Ⅰ)的求解： 由 $f(x)=x(1-\ln x)$ 得 $f'(x)=-\ln x$. 分别令 $f'(x)>0$ 得 $0<x<1$；令 $f'(x)<0$ 得 $x>1$. 故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,1)$；单调递减区间为 $(1,+\infty)$.

下面主要是对问题(Ⅱ)的证明进行探究.

分析： 由(Ⅰ)可知 $f(x)$ 的极大值为 $f(1)=1$，且有 $f(e)=0$. 由题设条件 $b\ln a-a\ln b=a-b$ 得 $\frac{\ln a+1}{a}=\frac{\ln b+1}{b}$，即 $f(\frac{1}{a})=f(\frac{1}{b})$. 又因为 a,b 为两个不相等的正数，所以必然有 $\max\{a,b\}>1$，$0<\min\{a,b\}<1$. 不妨设 $0<a<1$，则 $b>1$. 令 $x_1=\frac{1}{b}$，$x_2=\frac{1}{a}$，则有 $0<x_1<1<x_2<e$ 且 $f(x_1)=f(x_2)$，所以待证结论转化为证明 $2<x_1+x_2<e$. 下面给出 4 种证明思路.

思路一： 构造函数，对称作差

证明： (1) 先证 $x_1+x_2>2$，即证 $x_2>2-x_1$. 因为 $0<x_1<1<x_2<e$，不妨假设 $1<x_2\leqslant 2-x_1$. 构造函数 $g(x)=f(x)-f(2-x)$，$x\in(0,1)$，则 $g'(x)=-\ln[1-(x-1)^2]\geqslant 0$. 故 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，从而 $g(x_1)<g(1)=0\Leftrightarrow f(x_1)<f(2-x_1)$. 如图 1 所示，若 $1<x_2\leqslant 2-x_1$，则 $f(x_1)=f(x_2)\geqslant f(2-x_1)>f(x_1)$，显然矛盾！故假设不成立，即 $x_1+x_2>2$ 得证.

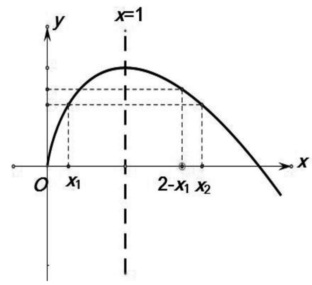

图 1

(2) 再证 $x_1+x_2<e$.

如图 2 所示，结合函数的单调性可知要证明 $x_1+x_2<e$，即证明 $x_2<e-x_1$，等价于证明 $f(x_1)=f(x_2)>f(e-x_1)$. 构造函数 $h(x)=f(x)-f(e-x)$，$x\in(0,1)$，则有 $h'(x)=-\ln x-\ln(e-x)=-\ln(ex$

* 作者系在读硕士研究生.

$-x^2)$, $h''(x)=\dfrac{2x-e}{x(e-x)}<0$. 所以 $h'(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减, 且 $h'(1)=-\ln(e-1)<0$, $h'(\dfrac{1}{e})=-\ln(1-\dfrac{1}{e^2})>0$. 由

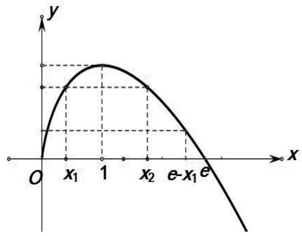

图 2

导函数的介值定理可知, 存在一点 $c\in(\dfrac{1}{e},1)$ 使得 $h'(c)=0$. 从而 $h(x)$ 在 $(0,c)$ 上单调递增, 在 $(c,1)$ 上单调递减. 又因为 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0^+}x=0$, $h(1)=(1-e)[1-\ln(e-1)]>0$. 所以 $h(x)=f(x)-f(e-x)>0$ 在定义域 $(0,1)$ 恒成立, 即原命题 $x_1+x_2<e$ 得证. 综上所述, $2<x_1+x_2<e$.

评注: 本题是一道老生常谈的"极值点偏移"问题, 求解的关键在于揭开试题"神秘的面纱", 不被其表象迷惑. 由于原函数中含有对数函数, 因此在比较大小时考虑使用作差法较为简洁. 根据函数特点画出草图, 可使解题思路更为清晰明了! 利用对称作差构造函数是解决此类问题的基本思路, 当然, 笔者对后半部分的证明过程当中用到了部分高数知识, 对于高中生来说可能不太适合. 因此在这里留下一个瑕疵, 期待有更为完美的处理方法.

思路二: 等价变形, 换元转化

分析: 由题设条件 $b\ln a-a\ln b=a-b$ 得 $\dfrac{\ln a+1}{a}=\dfrac{\ln b+1}{b}\Leftrightarrow\dfrac{\ln(ea)}{a}=\dfrac{\ln(eb)}{b}$, 则有 $\dfrac{\ln\frac{1}{ea}}{ea}=\dfrac{\ln\frac{1}{eb}}{eb}$. 构造函数 $g(t)=t\ln t(t>0)$, 令 $t_1=\dfrac{1}{ea}$, $t_2=\dfrac{1}{eb}$, 则 $g(t_1)=g(t_2)$. 问题转化为证明 $\dfrac{2}{e}<t_1+t_2<1$.

证明: 令 $g(t)=t\ln t\ (t>0)$, 并设 $g(t_1)=g(t_2)=m$. 由 $g'(t)=\ln t+1$ 易得 $g(t)$ 在区间 $(0,\dfrac{1}{e})$ 上单调递减, 在区间 $(\dfrac{1}{e},+\infty)$ 上单调

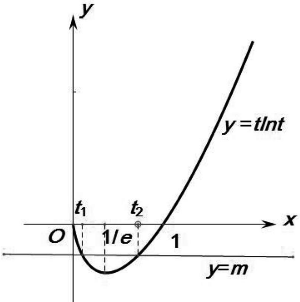

图 3

递增, 作出草图如图 3 所示. 不妨设 $0<t_1<\dfrac{1}{e}<t_2<1$, 则 $\dfrac{2}{e}<t_1+t_2\Leftrightarrow t_2>\dfrac{2}{e}-t_1\Leftrightarrow g(t_1)=g(t_2)>g(\dfrac{2}{e}-t_1)$. 令 $G(t)=g(t)-g(\dfrac{2}{e}-t)$, 其中 $t\in(0,\dfrac{1}{e})$. 则 $G'(t)=\ln(\dfrac{2t}{e}-t^2)<0$, 所以 $G(t)$ 单调递减且有 $G(t)>G(\dfrac{1}{e})=0$, 故 $G(t)$ 在 $t\in(0,\dfrac{1}{e})$ 上恒为正. 即 $g(t_1)-g(\dfrac{2}{e}-t_1)>0$ 成立. 所以有 $\dfrac{2}{e}<t_1+t_2$. 同理可证 $t_1+t_2<1$.

评注: 实际上方法一和方法二如出一辙, 相对方法一而言, 方法二的难度在于如何将题设条件 $b\ln a-a\ln b=a-b$ 合理变形, 通过巧妙换元把问题转化为研究函数 $g(t)=t\ln t(t>0)$ 的极值点偏移问题, 因此该方法具有一定的技巧性和创造性, 对考生的数学思维能力要求较高.

思路三: 巧用放缩, 妙解问题

证明: (1) 先证明 $x_1+x_2>2$, 即 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>2$. 根据对数平均不等式[1]: $\sqrt{x_1x_2}<\dfrac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}<\dfrac{x_1+x_2}{2}$ $(x_1,x_2>0,x_1\neq x_2)$ (证明过程见文献[1]), 不妨设 $0<x_1<1<x_2$, 可令 $\dfrac{x_2}{x_1}=t\ (t>1)$. 则有 $\sqrt{t}x_1<\dfrac{(1-t)x_1}{\ln\frac{1}{t}}<\dfrac{(1+t)x_1}{2}$, 化简得 $\dfrac{2(t-1)}{t+1}<\ln t<\dfrac{t-1}{\sqrt{t}}$, 其中 $t>1$. 再令 $\sqrt{t}=m(m>1)$, 则 $\ln m<\dfrac{1}{2}(m-\dfrac{1}{m})$, 其中 $m>1$. 所以当 $x>1$ 时, 得到对数平均不等式的等价关系式: $\dfrac{2(x-1)}{x+1}<\ln x<\dfrac{x-\frac{1}{x}}{2}$. (*)

由题设条件 $b\ln a-a\ln b=a-b$ 得 $\dfrac{\ln a+1}{a}=\dfrac{\ln b+1}{b}$ (根据前文分析限定 $0<a<1<b$). 利用上述等价式(*)立即可得 $\dfrac{\ln b+1}{b}<\dfrac{\frac{1}{2}(b-\frac{1}{b})+1}{b}$; 又当 $0<a<1$ 时, $\dfrac{1}{a}>1$, 所以 $\dfrac{\ln a+1}{a}>\dfrac{\frac{1}{2}(a-\frac{1}{a})+1}{a}$. 综上可知 $\dfrac{\frac{1}{2}(a-\frac{1}{a})+1}{a}<\dfrac{\frac{1}{2}(b-\frac{1}{b})+1}{b}$. (**)

进一步由(* *)式可得 $a-b<\frac{a}{2b}-\frac{b}{2a}$,不等式两边同除以 ab 得 $\frac{1}{b}-\frac{1}{a}<\frac{1}{2}(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2})=\frac{1}{2}(\frac{1}{b}+\frac{1}{a})(\frac{1}{b}-\frac{1}{a})$,即 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>2$ 得证.

(2)再证明 $x_1+x_2<e$.

构造函数 $w(x)=\ln x-x+1,(x>0)$,则 $w'(x)=\frac{1}{x}-1$,易知 $w(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增,在 $(1,+\infty)$ 上单调递减,故 $w(x)\leqslant w(1)=0$,即 $\ln x\leqslant x-1$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上恒成立. 因此有 $1-\ln x_2=\ln\frac{e}{x_2}\leqslant\frac{e}{x_2}-1$,所以 $x_2(1-\ln x_2)\leqslant x_2(\frac{e}{x_2}-1)=e-x_2$. 结合已知条件 $0<x_1<1<x_2<e$,可得 $1-\ln x_1>1$,从而 $x_1<x_1(1-\ln x_1)=x_2(1-\ln x_2)\leqslant e-x_2$,即 $x_1+x_2<e$ 得证. 综上所述 $2<x_1+x_2<e$.

评注:可以说对数平均不等式是解决极值点偏移问题的一大有效“杀手锏”,根据题设条件合理进行变形转化往往可以获得事半功倍的良好收益. 第二部分证明的关键点在于能否发现并利用“$1-\ln x_1>1,1-\ln x_2<1$”这一隐藏结论,运用放缩法研究不等式问题对学生而言具有一定的挑战性,不仅要掌握一定技巧还需对常见基本函数的相关结论如“$\ln x\leqslant x-1,(x>0)$”有一定的积累. 教师在日常教学中应注意归纳和整合相关知识,帮助学生建构自己的知识网络以我完善学生的数学认知结构,助力学生数学学科核心素养的达成.

思路四:合理代换,化难为易

证明:(1)先证明 $x_1+x_2>2$. 由 $f(x_1)=f(x_2)$ 得 $x_1-x_1\ln x_1=x_2-x_2\ln x_2$,所以有 $x_2\ln x_2-x_1\ln x_1=x_2-x_1$,即有 $\frac{x_2\ln x_2-x_1\ln x_1}{x_2-x_1}=1$. 则待证不等式 $x_1+x_2>2$ 转化为 $x_1+x_2>2\frac{x_2\ln x_2-x_1\ln x_1}{x_2-x_1}$,即证明 $x_2^2-x_1^2>2(x_2\ln x_2-x_1\ln x_1)$,等价于证明 $2x_2\ln x_2-x_2^2<2x_1\ln x_1-x_1^2$. 构造辅助函数 $p(x)=2x\ln x-x^2,x\in(0,+\infty)$,则 $p'(x)=2\ln x+2-2x,p''(x)=\frac{2}{x}-2$.

易得 $p'(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增,在 $(1,+\infty)$ 上单调递减,所以 $p'(x)<p'(1)=0$,即 $p(x)$ 在定义域上单调递减,结合 $0<x_1<1<x_2$ 得,$p(x_1)>p(x_2)$,故 $2x_2\ln x_2-x_2^2<2x_1\ln x_1-x_1^2$ 得证. 所以 $x_1+x_2>2$ 成立.

(2)再证明 $x_1+x_2<e$. 由 $f(x_1)=f(x_2)$ 得 $x_1(1-\ln x_1)=x_2(1-\ln x_2)$,从而有 $\frac{x_2}{x_1}=\frac{1-\ln x_1}{1-\ln x_2}$. 令 $\frac{x_2}{x_1}=k$,由已知 $0<x_1<1<x_2<e$ 得 $k=\frac{1-\ln x_1}{1-\ln(kx_1)}>1$,所以 $x_1=e^{\frac{k-k\ln k-1}{k-1}}$.

下证 $e^{\frac{k-k\ln k-1}{k-1}}+ke^{\frac{k-k\ln k-1}{k-1}}<e$. 即证明 $1+k<e^{\frac{k\ln k}{k-1}}$ 成立,所以问题转化为证明

$$\ln(1+k)<\frac{k\ln k}{k-1}\Leftrightarrow(k-1)\ln(1+k)<k\ln k.$$

构造函数 $h(x)=x\ln x-(x-1)\ln(1+x),(x>1)$,则 $h'(x)=\ln\left[\frac{x}{x+1}\right]+\frac{2}{1+x}>0$,记 $t=\frac{x}{x+1}\in\left(\frac{1}{2},1\right)$. 令 $h'(x)=s(t)=\ln t+2(1-t)$,则 $s'(t)=\frac{1}{t}-2<0$,所以 $s(t)$ 在 $(\frac{1}{2},1)$ 上单减,且 $s(1)=0,s(\frac{1}{2})>0$,从而 $h'(x)=s(t)>0$ 即 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单增,所以有 $h(k)>h(1)=0$. 即 $k\ln k-(k-1)\ln(1+k)>0$,故 $x_1+x_2<e$ 成立. 综上所述 $2<x_1+x_2<e$.

评注:该方法的第一部分是将 $\frac{x_2\ln x_2-x_1\ln x_1}{x_2-x_1}=1$ 作为一个整体代入,而第二部分则是将双变量 $\frac{x_1}{x_2}$ 转化为单变量问题处理. 解题的核心思想都是将问题进行化归与转化,构造出新的函数,同时规避了原函数中极值点偏移对问题的影响.

3 题源探究

(2017 年四川省省级联考高考数学模拟试题文理科第 10 题[2])设 a,b 是不相等的两个正数,且 $b\ln a-a\ln b=a-b$,给出下列结论:(1)$a+b-ab>1$;(2)$a+b>2$;(3)$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>2$. 其中所有正确结论的序号是(　　).

A. (1)(2)　　B. (1)(3)

C. (2)(3)　　D. (1)(2)(3)

评注:文[2]和[3]中已经对本题作了详尽的探讨,并且文[2]的作者认为该题的参考答案 D 选项有误,即认为仅基于“$b\ln a-a\ln b=a-b$”这一条件无法判断 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>2$ 成立. 事实上根据本文的分析可知这一结论是成立的. 另外文献[2]和[3]对于该模拟题的证明过程都过于复杂(均是通过构造函数进行证明),具体不再赘述. 笔者受本文例题证明过程的启发在这里提供一种更为简洁的证明思路与大家分享交流:

结论(1)证明:构造函数 $f(x)=x(1-\ln x)$,由 $b\ln a-a\ln b=a-b$ 得 $f(\frac{1}{a})=f(\frac{1}{b})$,所以必然有

$\max\{a,b\}>1,0<\min\{a,b\}<1$. 不妨设 $0<a<1$, 则 $b>1$. 故 $(1-a)(b-1)=a+b-ab-1>0\Rightarrow a+b-ab>1$.

结论(2)证明:由 $b\ln a-a\ln b=a-b$ 得 $\frac{\ln a+1}{a}=\frac{\ln b+1}{b}$,则有 $\frac{\ln a+\ln b+2}{a+b}=\frac{\ln a-\ln b}{a-b}$,利用对数平均不等式得 $\frac{\ln a+\ln b+2}{a+b}=\frac{\ln a-\ln b}{a-b}>\frac{2}{a+b}$. 所以有 $\ln a+\ln b+2>2\Rightarrow\ln a+\ln b=\ln(ab)>0$. 又因为 a,b 为两个不相等的正数,所以 $ab>1$,即 $a+b>2\sqrt{ab}>2$ 得证.

结论(3)即为本文原题第(2)小问的前半部分,不再阐述.

4 写在最后

作为数学教育工作者,应从不同的视角深入探究,不断优化解题过程,发掘试题背后所蕴含的价值. 高考评价体系中也强调“经过素质教育的培养,学习者应当能够从多个视角观察、思考同一个问题;能够灵活地、创造性地运用不同方法,发散地、逆向地解决问题”. 由此可见,多视角探究问题既是考试评价要求也是培养学生发散性思维和创新精神的重要途径. 基于此,笔者认为在数学解题教学中应充分发扬试题的辐射作用,鼓励学生从不同层次对问题展开探究,寻找不同的解题方法,从“就题论题”上升到“就题论法”,避免机械式的题海战术.

参考文献

[1]周思宇. 两类均值不等式的简单应用[J]. 高中数学教与学,2020(19):14-16.
[2]许朝霞. 质疑一道考试题的答案,期盼详细解答[J]. 中学数学研究(江西),2016,10:44-45.
[3] 苏文玉. 对一道模拟试题解答的释疑[J]. 中学数学研究(广州),2017(04):41-42.
[4] 教育部考试中心. 中国高考评价体系[M]. 北京:人民教育出版社,2019:25.

思辨才能深度理解

——由一道选择题的解答谈函数对称性质及其应用

江西师范大学数学与统计学院 (330022) 涂佳微*

函数概念及性质是中学数学课程内容的一条主线,而函数对称性在函数性质中占据重要地位,其中函数自对称和互对称性的结论较多也较抽象,是学生理解的一大难点. 本文从一道选择题的学生解答出发,利用中点坐标公式,对函数对称性的相关结论进行探析,以此促进学生对函数对称性本质的理解.

1. 引例

题目 对于函数 $y=f(x)$,若满足 $f(x-1)=f(1-x)$,则 $y=f(x)$ 的图像( ).

A. 关于直线 $x=0$ 对称 B. 关于直线 $x=1$ 对称

C. 关于直线 $x=-1$ 对称 D. 以上结论都正确

解答:生 1(换元法):令 $t=x-1$,则 $f(t)=f(-t)$. 显然 $f(t)$ 为偶函数,所以 $f(t)$ 的对称轴为 $t=0$,由 $t=x-1$ 可以知道,$t=0$ 时,有 $x=1$,所以函数关于 $x=1$ 对称. 故选 B.

生 2(换元法):令 $t=x-1$,则 $f(x)=f(t+1)$,由 $f(t)=f(-t)$,知 $f(t)$ 为偶函数,$f(t)$ 的对称轴为 $t=0$,所以 $f(t+1)$ 的对称轴为 $t=0-1$,因为 $f(x)=f(t+1)$,所以 $f(x)$ 的对称轴就是 $f(t+1)$ 的对称轴. 把 $t=0-1$ 中的 t 换成 x,得 $x=-1$,所以函数关于 $x=-1$ 对称. 故选 C.

生 3(图像法):因为 $f(x-1)=f(1-x)$,所以从 $f(x)$ 的图像,可以想象出 $f(x)$ 的对称轴为 $x=\frac{(x-1)+(1-x)}{2}=0$,故选 A.

生 4(特例法):令 $f(x)=1$,显然满足 $f(x-1)=f(1-x)$,则 $f(x)=1$ 的对称轴有无数条. 故选 D.

评析:这是一道典型的易错题,出现以上几种常见的解法,其中生 3 的解法正确,利用了函数图像的自对称性质,生 1 的错误出现在“由 $t=x-1$ 可以知道,$t=0$ 时,有 $x=1$,所以函数关于 $x=1$ 对称”,

* 作者系 2020 级在读硕士研究生.