江苏省仪征中学高一年级 3 月阶段性数学测试卷
参考答案

1．A　2．B　3．C　4．D　5．C　6．C　7．B　8．D
9．BC　10．BD　11．ABD　12．ACD
13．$\dfrac{\pi}{6}$　14．$\sqrt{3}x-y+2=0$　15．$\dfrac{\pi}{3}$　16．3

17．解：（1）由正弦定理得 $\sqrt{3}\sin B\sin C=\cos B\sin C+\sin C$，

$\triangle ABC$ 中，$\sin C>0$，所以 $\sqrt{3}\sin B-\cos B=1$，

所以 $\sin\left(B-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$，$-\dfrac{\pi}{6}<B-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{5\pi}{6}$，$B-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{\pi}{6}$，所以 $B=\dfrac{\pi}{3}$；

（2）因为 $b^2=ac$，由正弦定理得 $\sin^2 B=\sin A\sin C$，

$$\frac{1}{\tan A}+\frac{1}{\tan C}=\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\cos C}{\sin C}=\frac{\cos A\sin C+\sin A\cos C}{\sin A\sin C}$$

$$=\frac{\sin(A+C)}{\sin A\sin C}=\frac{\sin(\pi-B)}{\sin A\sin C}=\frac{\sin B}{\sin A\sin C}$$

所以，$\dfrac{1}{\tan A}+\dfrac{1}{\tan C}=\dfrac{\sin B}{\sin^2 B}=\dfrac{1}{\sin B}=\dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$．

18．解：（1）由直线 l_1 的方程为 $x+2y-4=0$ 且 $l_1\perp l_2$

可得直线 l_2 的斜率为：2，又 l_2 在 x 轴上的截距为 $\dfrac{1}{2}$，即过点 $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$

所以直线 l_2 方程：$y=2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$ 即 $2x-y-1=0$，

联立 l_1 方程，得：$\begin{cases}2x-y-1=0\\x+2y-4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{6}{5}\\y=\dfrac{7}{5}\end{cases}$，故交点为 $\left(\dfrac{6}{5},\dfrac{7}{5}\right)$

（2）依据题意可知：

直线 l_3 在 y 轴上截距是在 x 轴上的截距的 2 倍，

且直线 l_3 经过 l_1 与 l_2 的交点 $\left(\dfrac{6}{5},\dfrac{7}{5}\right)$

当直线 l_3 原点时，l_3 方程为：$y=\dfrac{7}{6}x$

当直线 l_3 不过原点时，设 l_3 方程为 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{2a}=1$

则 $a=\dfrac{19}{10}$，故 l_3 方程为：$\dfrac{10x}{19}+\dfrac{5y}{19}=1$，

即 $10x+5y-19=0$

综上所述：l_3 的方程为 $y=\dfrac{7}{6}x$ 或 $10x+5y-19=0$

19.解：（1）

$\because f\left(x\right)=2\cos x\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)-1=2\sqrt{3}\sin x\cos x+2\cos^{2}x-1$

$=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$,

所以，函数 $y=f\left(x\right)$ 的周期为 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$，

令 $-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\leq 2x+\dfrac{\pi}{6}\leq\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\left(k\in Z\right)$，解得 $-\dfrac{\pi}{3}+k\pi\leq x\leq\dfrac{\pi}{6}+k\pi\left(k\in Z\right)$；

令 $\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\leq 2x+\dfrac{\pi}{6}\leq\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi\left(k\in Z\right)$，解得 $\dfrac{\pi}{6}+k\pi\leq x\leq\dfrac{2\pi}{3}+k\pi\left(k\in Z\right)$.

因此，函数 $y=f\left(x\right)$ 的增区间为 $\left[-\dfrac{\pi}{3}+k\pi,\dfrac{\pi}{6}+k\pi\right]\left(k\in Z\right)$，减区间为 $\left[\dfrac{\pi}{6}+k\pi,\dfrac{2\pi}{3}+k\pi\right]\left(k\in Z\right)$；

（2）$\because f\left(\alpha\right)=2\sin\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{8}{5}$，$\therefore\sin\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{4}{5}$，

$\because\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\therefore 2\alpha+\dfrac{\pi}{6}\in\left(\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{7\pi}{6}\right)$，$\therefore\cos\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{1-\sin^{2}\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)}=-\dfrac{3}{5}$，

$\therefore\cos 2\alpha=\cos\left[\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)-\dfrac{\pi}{6}\right]=\cos\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)\cos\dfrac{\pi}{6}+\sin\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)\sin\dfrac{\pi}{6}$

$=-\dfrac{3}{5}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{4}{5}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{4-3\sqrt{3}}{10}$.

20．解：（1）$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$，

$\therefore x=\dfrac{3}{4}$，$y=\dfrac{1}{4}$，因此，$x-y=\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$；

（2）设 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AM}=\dfrac{3}{4}\lambda\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{4}\lambda\overrightarrow{AC}$，

再设 $\overrightarrow{NP}=k\overrightarrow{NC}$，则 $\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AN}=k\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AN}\right)$，即 $\overrightarrow{AP}=\left(1-k\right)\overrightarrow{AN}+k\overrightarrow{AC}=\dfrac{1-k}{2}\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC}$，

所以，$\begin{cases}\dfrac{3}{4}\lambda=\dfrac{1-k}{2}\\\dfrac{1}{4}\lambda=k\end{cases}$，解得 $\begin{cases}\lambda=\dfrac{4}{7}\\k=\dfrac{1}{7}\end{cases}$，所以 $\overrightarrow{AP}=\dfrac{3}{7}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{7}\overrightarrow{AC}$，

因此，

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}=\dfrac{1}{7}\left(3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\dfrac{1}{7}\left(\overrightarrow{AC}^{2}+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{AB}^{2}\right)$

$=\dfrac{1}{7}\times\left(3^{2}+2\times 4\times 3\times\dfrac{1}{2}-3\times 4^{2}\right)=-\dfrac{27}{7}$.

21．解：（1）在边长为4的正三角形ABC中，

由D为AB的中点，所以$BD=AD=2$，又$\theta=60^\circ$，所以$DE=2$，

又$\angle EDF=90^\circ$，所以$\angle ADF=30^\circ$，所以$DF=AD\cos 30^\circ=\sqrt{3}$

所以$S_{\Delta DEF}=\dfrac{1}{2}DE \bullet DF=\sqrt{3}$

（2）

由$\dfrac{DE}{\sin 60^\circ}=\dfrac{BD}{\sin\left[180^\circ-\left(60^\circ+\theta\right)\right]}$，$\dfrac{DF}{\sin 60^\circ}=\dfrac{AD}{\sin\left[180^\circ-60^\circ-\left(90^\circ-\theta\right)\right]}$

化简可知：

$DE=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin\left(60^\circ+\theta\right)}$，$DF=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin\left(30^\circ+\theta\right)}$，由$S_{\Delta DEF}=\dfrac{1}{2}DE \bullet DF$

所以$S_{\Delta DEF}=\dfrac{3}{2\sin\left(60^\circ+\theta\right)\sin\left(30^\circ+\theta\right)}$

又$\sin\left(60^\circ+\theta\right)=\sin 60^\circ\cos\theta+\cos 60^\circ\sin\theta$

即$\sin\left(60^\circ+\theta\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\dfrac{1}{2}\sin\theta$

$\sin\left(30^\circ+\theta\right)=\sin 30^\circ\cos\theta+\cos 30^\circ\sin\theta$

即$\sin\left(30^\circ+\theta\right)=\dfrac{1}{2}\cos\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta$

所以$\sin\left(60^\circ+\theta\right)\sin\left(30^\circ+\theta\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}+\dfrac{1}{2}\sin 2\theta$

则$S_{\Delta DEF}=\dfrac{3}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\sin 2\theta}$

由$0^\circ<\theta<90^\circ$，所以当$\sin 2\theta=1$，即$\theta=45^\circ$时，$\left(S_{\Delta DEF}\right)_{\min}=12-6\sqrt{3}$

22．解：（1）当$a=2$时，$g\left(x\right)=\log_2\left(2x+1\right)$，

则$f\left(x\right)+g\left(x\right)=\log_2 x+\log_2\left(2x+1\right)=\log_2\left(2x^2+x\right)$，定义域为$\left(0,+\infty\right)$.

由$f\left(x\right)+g\left(x\right)=0$，可得$\log_2\left(2x^2+x\right)=0$，可得$2x^2+x-1=0$，

解得$x=\dfrac{1}{2}$或$x=-1$（舍去），因此，关于x的方程$f\left(x\right)+g\left(x\right)=0$的解为$x=\dfrac{1}{2}$；

（2）当$x\in\left[2,8\right]$时，$f\left(x\right)=\log_2 x\in\left[1,3\right]$.

当$t\le 1$时，$\log_2 x\ge t$对任意的$x\in\left[2,8\right]$恒成立，则$h\left(x\right)=\left|f\left(x\right)-t\right|+t=\log_2 x$，

此时，函数$y=h\left(x\right)$在区间$\left[2,8\right]$上为增函数，$h\left(x\right)_{\max}=h\left(8\right)=3$，合乎题意；

当$t\ge 3$时，$\log_2 x\le t$对任意的$x\in\left[2,8\right]$恒成立，则$h\left(x\right)=\left|f\left(x\right)-t\right|+t=2t-\log_2 x$，

此时，函数$y=h\left(x\right)$在区间$\left[2,8\right]$上为减函数，$h\left(x\right)_{\max}=h\left(2\right)=2t-1=3$，解得$t=2$，不合乎题意；

当$1<t<3$时，令$f\left(x\right)-t=0$，得$x=2^t$，此时$h\left(x\right)=\begin{cases}2t-\log_2 x, 2\le x\le 2^t\\ \log_2 x, 2^t<x\le 8\end{cases}$，

所以，函数$y=h\left(x\right)$在区间$\left[2,2^t\right]$上为减函数，在区间$\left(2^t,8\right]$上为增函数.

$\because h(2)=2t-1$，$h(8)=3$，由于$h(x)_{\max}=\max\{2t-1,3\}=3$，所以$2t-1\le 3$，解得$t\le 2$.
此时，$1<t\le 2$.
综上所述，实数t的取值范围是$(-\infty,2]$；

（3）$g(x)-f(x)=\log_2(ax+1)-\log_2 x=\log_2\left(a+\dfrac{1}{x}\right)$，

由于内层函数$u=a+\dfrac{1}{x}$在区间$[m,m+1]\ (m>0)$为减函数，外层函数$y=\log_2 u$为增函数，

所以，函数$y=g(x)-f(x)$在区间$[m,m+1]$上为减函数，

所以$y_{\max}=\log_2\left(a+\dfrac{1}{m}\right)$，$y_{\min}=\log_2\left(a+\dfrac{1}{m+1}\right)$，

由题意可得$y_{\max}-y_{\min}=\log_2\left(a+\dfrac{1}{m}\right)-\log_2\left(a+\dfrac{1}{m+1}\right)\le 1$，可得$a+\dfrac{1}{m}\le 2\left(a+\dfrac{1}{m+1}\right)$，

所以，$a\ge\dfrac{1}{m}-\dfrac{2}{m+1}=\dfrac{1-m}{m(m+1)}$.

①当$m=1$时，$\dfrac{1-m}{m(m+1)}=0$；

②当$m\in\left[\dfrac{1}{2},1\right)$时，令$t=1-m\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$，设$y=\dfrac{1-m}{m(m+1)}$，

可得$y=\dfrac{t}{(1-t)(2-t)}=\dfrac{t}{t^2+2-3t}=\dfrac{1}{t+\dfrac{2}{t}-3}$.

下面利用定义证明函数$\varphi(t)=t+\dfrac{2}{t}-3$在区间$\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$上的单调性，

任取t_1、$t_2\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$且$t_1<t_2$，即$0<t_1<t_2\le\dfrac{1}{2}$，

$$\varphi(t_1)-\varphi(t_2)=\left(t_1+\frac{2}{t_1}-3\right)-\left(t_2+\frac{2}{t_2}-3\right)=(t_1-t_2)+\left(\frac{2}{t_1}-\frac{2}{t_2}\right)=(t_1-t_2)+\frac{2(t_2-t_1)}{t_1t_2}$$

$=\dfrac{(t_1-t_2)(t_1t_2-2)}{t_1t_2}$，

$\because 0<t_1<t_2\le\dfrac{1}{2}$，$\therefore t_1-t_2<0$，$0<t_1t_2<\dfrac{1}{4}$，$\therefore\varphi(t_1)-\varphi(t_2)>0$，即$\varphi(t_1)>\varphi(t_2)$，

所以，函数$\varphi(t)=t+\dfrac{2}{t}-3$在区间$\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$上单调递减，

当$t=\dfrac{1}{2}$时，函数$y=\dfrac{1}{t+\dfrac{2}{t}-3}$取得最大值$\dfrac{2}{3}$.

综上所述，函数$y=\dfrac{1-m}{m(m+1)}$在$m\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$上的最大值为$\dfrac{2}{3}$，$\therefore a\ge\dfrac{2}{3}$.

因此，实数a的取值范围是$\left[\dfrac{2}{3},+\infty\right)$.