# 第 27 届（2016 年）希望杯全国数学邀请赛

## 高二　　第 2 试

一、选择题

1.数列$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=(-1)^n\cdot(2n-1)$，则它的前 2016 项之和是（　　）

（A）-2016　　（B）-1008　　（C）2016　　（D）4032

答案：（C）.

解：
$$a_n+a_{n+1}=(-1)^n(2n-1)+(-1)^{n+1}\left[2(n+1)-1\right]=(-1)^{n+1}\cdot 2,$$

当$n$为奇数时，
$$a_n+a_{n+1}=2,$$

所以
$$\begin{aligned}S_{2016}&=a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{2015}+a_{2016}\\&=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{2015}+a_{2016})\\&=2+2+\cdots+2\\&=2\times(2016\div 2)\\&=2016,\end{aligned}$$

故选（C）.

2. The symmetry point of point (5,1) about the line $y=2x+1$,is（　　）

(A) (-3，5)　　(B) (-5，1)　　(C) (-1，5)　　(D) (3，-5)

（英汉小词典：symmetry　对称）

译文:点(5,1)关于直线 $y=2x+1$ 的对称点是（　　）

(A) (-3，5)　　(B) (-5，1)　　(C) (-1，5)　　(D) (3，-5)

答案：（A）.

解：设 $P(5,1)$，　所求点坐标是$Q(x_0,y_0)$，则

线段 $PQ$ 的中点 $M(\dfrac{x_0+5}{2},\dfrac{y_0+1}{2})$在直线 $y=2x+1$ 上，

所以
$$\frac{y_0+1}{2}=x_0+5+1,$$

即
$$2x_0-y_0+11=0. \qquad ①$$

另一方面，因为 $PQ$ 与直线 $y=2x+1$(斜率为 2)垂直，所以

$$\frac{y_0-1}{x_0-5}=-\frac{1}{2},$$

即 $$x_0+2y_0-7=0. \qquad ②$$

由①②可解得 $$x_0=-3, y_0=5.$$

故点(5,1)关于直线 y=2x+1 的对称点是 (-3,5).

故选（A）.

3.函数 $y=\sqrt{x^2+4}+\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$ 的最小值是（　　）

(A) 4　　(B) $\frac{5}{2}$　　(C) 2　　(D) $\frac{3}{2}$

答案:（B）.

解:因为 $$y=\frac{3}{4}\sqrt{x^2+4}+\frac{\sqrt{x^2+4}}{4}+\frac{1}{\sqrt{x^2+4}},$$

由均值不等式, 可知

$$\frac{\sqrt{x^2+4}}{4}+\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\geq 2\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+4}}{4}\times\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}}=1,$$

当 $\frac{\sqrt{x^2+4}}{4}=\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$,即 $x$=0 时，上式的等号成立，此时，$\frac{3}{4}\sqrt{x^2+4}$ 也取得最小值 $\frac{3}{2}$.

所以函数 $y=\sqrt{x^2+4}+\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$ 的最小值是

$$\frac{3}{2}+1=\frac{5}{2}.$$

故选（B）.

另解：令 $t=\sqrt{x^2+4}$，则 $$t\geq 2.$$

于是 $$y=t+\frac{1}{t},$$

显然，$t\geq 2$时，$y=t+\frac{1}{t}$ 单调递增，所以

$$y_{\min}=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}.$$

故选（B）.

4.已知正实数 $x$，$y$ 满足 $xy+x+y-2=0$，则 $x+y$ 的取值范围是(　　)

(A) $(-\infty,-2-2\sqrt{3}]$　　(B) $\left[2\sqrt{3}-2,2\right)$　　(C) $[2\sqrt{3}-2,2]$　　(D) $[-2+2\sqrt{3},+\infty)$

答案：(B).

解：设 $x+y=k$，则　　$xy=2-k$，

于是可知　　$x$，$y$ 是方程 $t^2-kt+2-k=0$ 的两个正根，

所以
$$\begin{cases}k>0\\2-k>0\\\Delta=k^2-4(2-k)\ge 0\end{cases},$$

解得
$$\begin{cases}k>0,\\k<2,\\k\ge -2+2\sqrt{3},\end{cases}\text{或}\begin{cases}k>0,\\k<2,\\k\le -2-2\sqrt{3}.\end{cases}$$

所以
$$2\sqrt{3}-2\le k<2.$$

即　　$k$ 的取值范围是 $\left[2\sqrt{3}-2,2\right)$.

故选（B）.

5.已知 $a$ 是整数，且 $-6\le a\le 6$.若 $51^{2016}+a$ 能被 13 整除，则 $a$=(　　)

（A）-3　　（B）-1　　（C）2　　（D）6

答案：（B）.

解：因为　　52 是 13 的倍数，

51=52-1，

$$51^{2016}=(52-1)^{2016}=C_{2016}^0\cdot 52^{2016}-C_{2016}^1\cdot 52^{2015}+\cdots-C_{2016}^{2015}\cdot 52+1,$$

所以要使 $51^{16}+a$ 能被 13 整除，只需

1+$a$ 能被 13 整除，

结合 $-6\le a\le 6$，得　　$a$=-1.

故选（B）.

6.若点 $P$ 的坐标 $(x,y)$ 满足等式 $(x^2+y^2)^2=x^2+y^2+2|x|y-1$，则点 $P$ 的个数是（　　）

（A）0　　（B）2　　（C）4　　（D）6

答案：（B）.

解：设 $x^2+y^2=r^2(r>0)$，显然 $x=y=0$ 不满足，故可知

$$\text{存在}\theta\in[0,2\pi)\text{使}x=r\cos\theta,y=r\sin\theta,$$

从而$(x^2+y^2)^2=x^2+y^2+2|x|y-1$，即

$$r^4=r^2+2r^2|\cos\theta|\sin\theta-1,$$

即 $$2|\cos\theta|\sin\theta=\frac{1}{r^2}(r^4-r^2+1)=r^2+\frac{1}{r^2}-1\geq 1, \quad ①$$

又 $$|\sin 2\theta|\geq 2|\cos\theta|\sin\theta\text{，且}|\sin 2\theta|\leq 1, \quad ②$$

由①②，得 $$r=1\text{，}\sin\theta>0\text{，且}\sin 2\theta=\pm 1.$$

所以 $$2\theta=\frac{\pi}{2}\text{，或}2\theta=\frac{3}{2}\pi,$$

即 $$\theta=\frac{\pi}{4}\text{，或}\theta=\frac{3}{4}\pi.$$

从而满足条件的点$P$有两个

$$P_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),P_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

故选（B）.

7．$\Delta ABC$中，$BC=a,AC=b,AB=c,$则“$\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=\cos^2\frac{B}{2}$”的充要条件是（　　）

（A）$a+b=2c$　　（B）$b+c=2a$　　（C）$a+c=2b$　　（D）$a\cdot c=b^2$

**答案：（C）.**

**解：**由$\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=\cos^2\frac{B}{2}$，得

$$\frac{1-\cos A}{2}+\frac{1-\cos B}{2}+\frac{1-\cos C}{2}=\frac{1+\cos B}{2},$$

移项整理可得 $$\frac{1}{2}(\cos A+\cos C)=1-\cos B,$$

所以 $$\cos\frac{A+C}{2}\cdot\cos\frac{A-C}{2}=2\sin^2\frac{B}{2}. \quad ①$$

在$\Delta ABC$中， $$A+B+C=\pi,$$

于是 $$\sin\frac{B}{2}=\sin\frac{\pi-(A+C)}{2}=\cos\frac{A+C}{2}, \quad ②$$

将②代入①，得 $$\cos\frac{A-C}{2}=2\sin\frac{B}{2},$$

上式两边同乘以$2\cos\frac{B}{2}$（其中$2\cos\frac{B}{2}=2\sin\frac{A+C}{2}$），得

$$2\sin B=\sin A+\sin C.$$

根据正弦定理，得 $a+c=2b$，反之也成立.

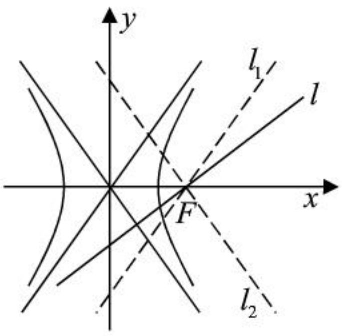
故选（C）.

8.已知直线 $l$： $y=k(x-2016)$ 和双曲线 $C: x^2-y^2=1$，若直线 $l$ 与双曲线 $C$ 的右支有且只有一个交点，则参数 $k$ 的取值范围是（　　）

（A）(-1，1)　　（B）[-1，1]　　（C）$(-\infty,1]$　　（D）$[1,+\infty)$

答案：（B）.

解：如图，易知直线 $l$：$y=k(x-2016)$ 过点 $P(2016,0)$，且双曲线 $x^2-y^2=1$ 的渐近线是 $y=\pm x$，斜率为 $\pm1$.




要使 $l$ 与双曲线 $C$ 的右支有且只有一个交点，只须

直线 $l$ 位于渐近线 $y=\pm x$ 之间，

即 直线 $l$ 的斜率 $k$ 满足：$-1\le k\le 1$，

故选（B）.

9．设 $f(n)$ 是正整数 $n$（十进制）的各个数位上的数字的平方之和，比如 $f(123)=1^2+2^2+3^2=14$.记 $f_1(n)=f(n)$，$f_{k+1}(n)=f(f_k(n))$，$k=1,2,3,\ldots$，则 $f_{2015}(2016)$ 的值等于（　　）

（A） 20　　（B）42　　（C）89　　（D）145

答案：（C）.

解： $f(2016)=2^2+0^2+1^2+6^2=41$.

将 $f(2016)=41$ 记作 $2016\to 41$，于是有

$$2016\to 41\to 17\to 50\to 25\to 29\to 85\to 89\to 145\to 42\to 20\to 4\to 16$$
$$\to 37\to 58\to 89\to 145\to\cdots$$

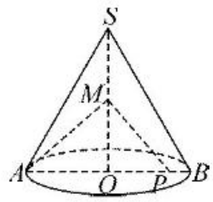
观察上式可知， 从 89 开始， $f_n$ 是周期为 8 的周期数列，

所以 $$f_{2015}(2016)=f_{2008}(89)=f_{251\times 8}(89)=89 .$$

故选（C）.

10．如图，某圆锥的轴截面 $SAB$ 是边长为 2 的等边三角形，$O$ 是底面中心，$M$ 为 $SO$ 的中点，动点 $P$ 在圆锥底面内（包括圆周）.若 $AM\perp MP$，则 $P$ 点形成的轨迹的长度是（　　）

（A）$\sqrt{7}$　　　　（B）$\dfrac{\sqrt{7}}{2}$　　　　（C）3　　　　（D）$\dfrac{3}{2}$




**答案：(B).**

解：以 $O$ 为坐标原点，过点 $O$ 且垂直于平面 $ASB$ 的直线为 $x$ 轴， $AB$ 为 $y$ 轴，$OS$ 为 $z$ 轴，建立空间直角坐标系，则

$$\mathrm{A}(0,-1,0),\mathrm{B}(0,1,0),S(0,0,\sqrt{3}),\ M(0,0,\frac{\sqrt{3}}{2}).$$

设 $P(x,y,0)$ ，于是有

$$\overrightarrow{AM}=(0,1,\frac{\sqrt{3}}{2}),\overrightarrow{MP}=(x,y,-\frac{\sqrt{3}}{2}).$$

由 $AM\perp MP$，得 $$(0,1,\frac{\sqrt{3}}{2})\cdot(x,y,-\frac{\sqrt{3}}{2})=0,$$

即 $y=\dfrac{3}{4}$，此为点 $P$ 的轨迹方程，它在底面内的长度为

$$2\sqrt{1-(\frac{3}{4})^2}=\frac{\sqrt{7}}{2}.$$

故选（B）.

二、填空题

11. 在等差数列$\{a_n\}$中，$a_{50}=100$，则数列$\{a_n\}$的前 99 项的和等于__________.

答案：9900.

解：等差数列$\{a_n\}$ $\{a_n\}$的前 99 项的和等于

$$\frac{a_1+a_{99}}{2}\times 99=\frac{2a_{50}}{2}\times 99=9900.$$

12.函数$y=\dfrac{4x-1}{x^2+3}$的值域是__________.

答案：$[-\dfrac{4}{3},1]$.

解：因为 $x^2+3>0$，

所以$y=\dfrac{4x-1}{x^2+3}$，即 $yx^2-4x+3y+1=0$

当$y$=0 时，$x=\dfrac{1}{4}$；

当$y\neq 0$时， $\Delta_x=16-4y(3y+1)\geq$

解得 $-\dfrac{4}{3}\leq y\leq 1$且$y\neq 0$.

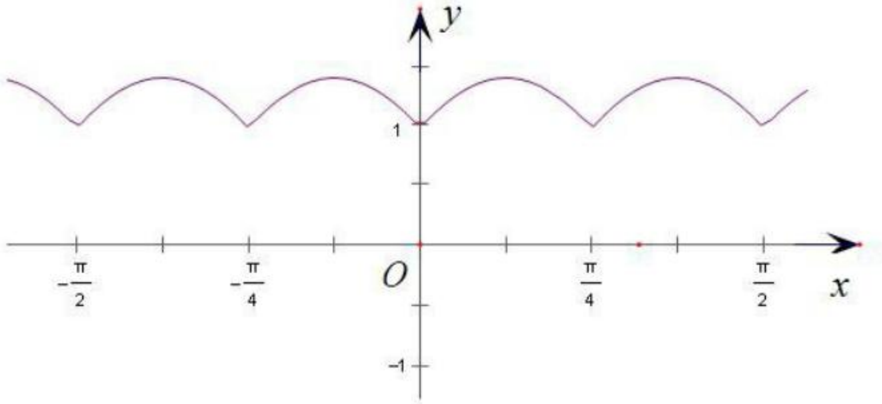
综上知， $-\dfrac{4}{3}\leq y\leq 1$.

所以 函数$y=\dfrac{4x-1}{x^2+3}$的值域是$[-\dfrac{4}{3},1]$.

13.函数$y=|\sin 2x|+|\cos 2x|$的最小正周期是_______ .

答案：$\dfrac{\pi}{4}$.

解：作出函数$y=|\sin 2x|+|\cos 2x|$的图像，如下图.




由图可知

$$函数\ y=|\sin 2x|+|\cos 2x|\ 的最小正周期是\ \frac{\pi}{4}.$$

14.已知 $x$，$y$ 都是正数，$x^2+2y^2=\sqrt{2}$，则 $\frac{2}{x}+\frac{\sqrt{2}}{y}$ 的最小值是____________.

答案：$4\sqrt[4]{2}$.

解：因为 $x$，$y$ 都是正数，于是由 $x^2+2y^2=\sqrt{2}$，可得

$$\sqrt{2}\geq 2\cdot x\cdot\sqrt{2}y,$$

即

$$\frac{1}{xy}\geq 2.$$

又

$$\frac{2}{x}+\frac{\sqrt{2}}{y}\geq 2\cdot\sqrt{\frac{2}{x}}\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{y}}$$

$$=2\cdot\sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{xy}}$$

$$\geq 2\cdot\sqrt{4\sqrt{2}}$$

$$=4\sqrt[4]{2},$$

所以当 $\frac{2}{x}=\frac{\sqrt{2}}{y}$ 且 $x^2+2y^2=\sqrt{2}$，即 $x=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$，$y=\frac{\sqrt[4]{2}}{2}$ 时，

$$\frac{2}{x}+\frac{\sqrt{2}}{y}\ 取得最小值\ 4\sqrt[4]{2}.$$

15.设$[x]$表示不超过实数$x$的最大整数，集合$A=\left\{n \mid n=\left[\frac{k^2}{2016}\right], 1\le k\le 2016, k\in\mathbf{N}\right\}$，则$A$中元素的个数是__________.

答案：1513.

解：因为
$$\frac{(k+1)^2}{2016}-\frac{k^2}{2016}=\frac{2k+1}{2016}.$$

由$\frac{(k+1)^2}{2016}-\frac{k^2}{2016}=\frac{2k+1}{2016}\le 1$，$k\in\mathbf{N}$，解得
$$k\le 1007,$$

即当$k=1,2,3,\cdots,1007$时，
$$\left[\frac{(k+1)^2}{2016}\right]=\left[\frac{k^2}{2016}\right]，或\left[\frac{(k+1)^2}{2016}\right]=\left[\frac{k^2}{2016}\right]+1.$$

因为
$$\left[\frac{1007^2}{2016}\right]=503,\left[\frac{1^2}{2016}\right]=0,$$

所以当$k=1,2,3,\cdots,1007$时，$\left[\frac{k^2}{2016}\right]$能取遍$0,1,\cdots,503$的所有数值，共504个.

另外，当$k=1008,1009,\cdots,2016$时，

因为$\frac{(k+1)^2}{2016}-\frac{k^2}{2016}>1$，所以
$$\left[\frac{(k+1)^2}{2016}\right]\ge\left[\frac{k^2}{2016}\right]+1,$$

即
$$\left[\frac{1008^2}{2016}\right],\left[\frac{1009^2}{2016}\right],\cdots,\left[\frac{2016^2}{2016}\right]的值各不相同,$$

共有不同数值
$$2016-1008+1=1009（个）,$$

注意到
$$\left[\frac{1008^2}{2015}\right]=504>\left[\frac{1007^2}{2015}\right]=503,$$

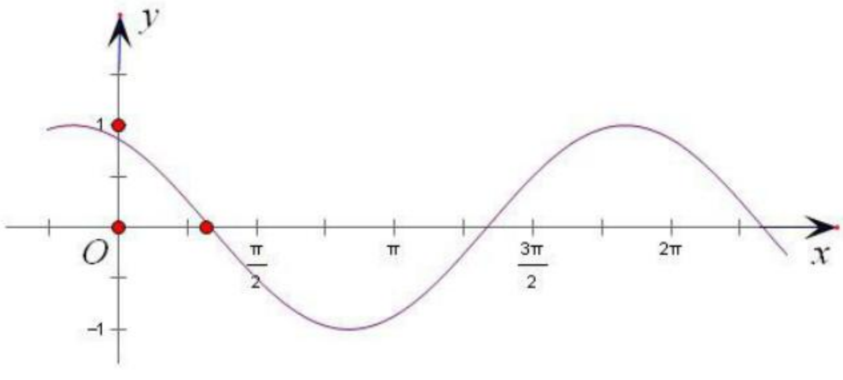
所以$A$中元素的个数是
$$504+1009=1513.$$

16.函数 $y=2\sin(x-\frac{\pi}{3})+3\cos(x+\frac{\pi}{6})$ 在 $[0,2\pi]$ 上的单调递减区间是__________.

答案：$[0,\frac{5\pi}{6}]\cup[\frac{11\pi}{6},2\pi]$.

解：
$$
\begin{aligned}
y&=2\sin(x-\frac{\pi}{3})+3\cos(x+\frac{\pi}{6})\\
&=2(\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{3}-\cos x\sin\frac{\pi}{3})+3(\cos x\cos\frac{\pi}{6}-\sin x\sin\frac{\pi}{6})\\
&=(\sin x-\sqrt{3}\cos x)+(\frac{3\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{3}{2}\sin x)\\
&=(1-\frac{3}{2})\sin x+(-\sqrt{3}+\frac{3\sqrt{3}}{2})\cos x\\
&=-\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\\
&=\sin(\frac{\pi}{3}-x),
\end{aligned}
$$

作出 $y=\sin(\frac{\pi}{3}-x)$ 的图象，如下图所示，



由 $x\in[0,2\pi]$，得 $\frac{\pi}{3}-x\in[-\frac{5\pi}{3},\frac{\pi}{3}]$，

令 $\frac{\pi}{3}-x=-\frac{\pi}{2}$，得 $x=\frac{5\pi}{6}$；令 $\frac{\pi}{3}-x=-\frac{3\pi}{2}$，得 $x=\frac{11\pi}{6}$，

所以 $y=\sin(\frac{\pi}{3}-x)$ 单调递减区间是 $[0,\frac{5\pi}{6}]\cup[\frac{11\pi}{6},2\pi]$，

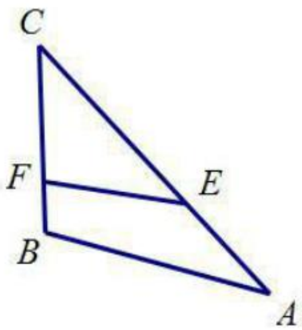
故函数 $y=2\sin(x-\frac{\pi}{3})+3\cos(x+\frac{\pi}{6})$ 在 $[0,2\pi]$ 上的单调递减区间是

$$[0,\frac{5\pi}{6}]\cup[\frac{11\pi}{6},2\pi].$$

17. $\Delta ABC$ 中，$AC$=4，$BC$=3，$\angle C=30^\circ$，$E$、$F$ 分别在边 $AC$、$BC$ 上.若 $EF$ 平分 $\Delta ABC$ 的面积，则 $EF$ 的最小值是__________.

答案：$3-\sqrt{3}$.

解：$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC\cdot\sin C=\frac{1}{2}\times4\times3\sin30^\circ=3.$$




设 $CE$=$x$，$CF$=$y$，则有

$$S_{\Delta CEF}=\frac{1}{2}xy\sin30^\circ=\frac{1}{4}xy,$$

又 $$S_{\Delta CEF}=\frac{1}{2}S_{\Delta ABC}=\frac{3}{2},$$

所以 $$\frac{1}{4}xy=\frac{3}{2}，即\quad xy=6.$$

由余弦定理，得

$$EF^2=x^2+y^2-2xy\cos30^\circ$$

$$\geq 2xy-\sqrt{3}xy$$

$$
\begin{aligned}
&= xy(2-\sqrt{3}) \\
&= 6(2-\sqrt{3}) \\
&= 3(4-2\sqrt{3}) \\
&= 3(\sqrt{3}-1)^2,
\end{aligned}
$$

所以 $$EF \geq \sqrt{3}(\sqrt{3}-1) = 3-\sqrt{3},$$

当 $x = y = \sqrt{6}$ 时，上式的等号成立.

故 $EF$ 的最小值是 $3-\sqrt{3}$.

18. The equation of the circle that pass coordinate origin and two intersected points of $x^2+y^2=4$ and $x^2+y^2+2x-4y+1=0$ is ____________.

（英汉小词典：equation　方程；coordinate origin　坐标原点）

答案：$5x^2+5y^2+8x-16y=0$.

译文：过两圆 $x^2+y^2=4$ 和 $x^2+y^2+2x-4y+1=0$ 的交点，且过原点的圆的方程是

____________.

解法 1：因为原点不在题设中的两个圆上，故可设所求的圆的方程为

$$x^2+y^2-4+\lambda(x^2+y^2+2x-4y+1)=0. \qquad (*)$$

将原点坐标 $x=0, y=0$ 代入（*），得

$$-4+\lambda=0，即\quad \lambda=4.$$

将 $\lambda=4$ 代入（*），整理得 $$5x^2+5y^2+8x-16y=0.$$

因此，所求的圆的方程是 $$5x^2+5y^2+8x-16y=0.$$

解法 2：设满足题意的圆的方程是

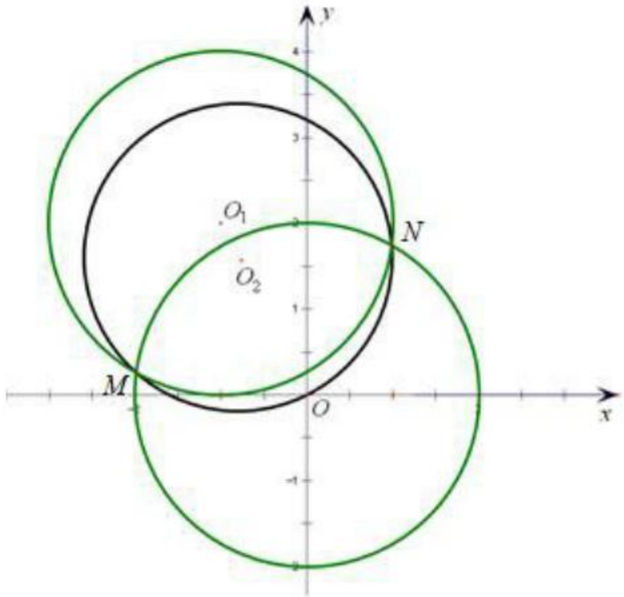
$$x^2+y^2+Bx+Cy+D=0,$$

由题设此圆过原点，易得 $$D=0,$$

所以满足题意的圆的方程是 $$x^2+y^2+Bx+Cy=0.$$

将它与题中两圆的方程联立，得

$$\begin{cases} x^2+y^2=4, & ① \\ x^2+y^2+2x-4y+1=0, & ② \\ x^2+y^2+Bx+Cy=0. & ③ \end{cases}$$




②-① ，得 $2x-4y+5=0$，

③-①，得 $Bx+Cy+4=0$，

其中，上面两个方程都表示过两圆的交点的直线方程，

因为交点都是相同的两点 $M$ 和 $N$，所以它们所表示的方程是同一个方程，即

$$\frac{B}{2}=\frac{C}{-4}=\frac{4}{5},$$

所以 $B=\frac{8}{5},C=-\frac{16}{5}$，

于是满足题意的圆的方程是 $x^2+y^2+\frac{8}{5}x-\frac{16}{5}y=0$，

即 $5x^2+5y^2+8x-16y=0$.

19.设 $f(x)=3\cos x+4\sin x-2$.若实数 $a$，$b$，$c$ 使 $af(x)+bf(x-c)=5$ 对所有实数 $x$ 恒成立，则 $(a+b)\cos c=$__________.

答案：$\frac{5}{2}$.

解：易知 $f(x)=3\cos x+4\sin x-2=5\sin(x+\varphi)-2$，其中 $\sin\varphi=\frac{3}{5},\cos\varphi=\frac{4}{5}$，

于是 $af(x)+bf(x-c)=5$ 对所有实数 $x$ 恒成立，即

$$a[5\sin(x+\varphi)-2]+b[5\sin(x+\varphi-c)-2]=5,$$

即
$$(5a+5b\cos c)\sin(x+\varphi)-5b\cos(x+\varphi)\sin c-2(a+b)=5$$

对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 成立，

于是
$$\begin{cases}5(a+b\cos c)=0, & ①\\ 5b\sin c=0, & ②\\ 2(a+b)+5=0. & ③\end{cases}$$

若 $b=0$，由①得 $a=0$，与③矛盾，

故 $b\neq 0$，

于是由②，得 $\sin c=0$，

即 $c=k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

若 $k=2n,n\in\mathbf{Z}$，由①，得 $a+b=0$，与③矛盾，

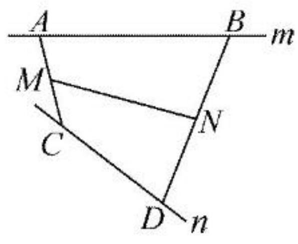
故 $k=2n-1,n\in\mathbf{Z}$，

此时 $\cos c=\cos(2n-1)\pi=-1$.

从而由①、③，得 $a=b$，且 $a+b=-\dfrac{5}{2}$.

所以 $(a+b)\cos c=-\dfrac{5}{2}\times(-1)=\dfrac{5}{2}$.

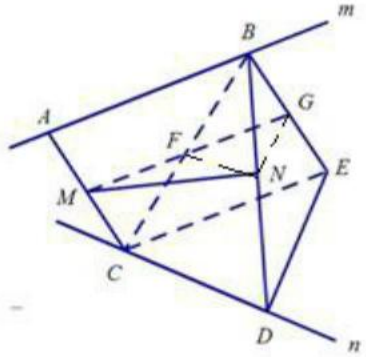
20.如图，已知 $m,n$ 是异面直线，点 $A,B\in m$，$AB=6$；点 $C,D\in n$，$CD=4$.若 $M,N$ 分别是 $AC$，$BD$ 的中点，$MN=2\sqrt{2}$，则 $m$ 与 $n$ 所成角的余弦值是___________.




答案：$\dfrac{5}{12}$.

解法 1：如图，作 $CE//AB$，且 $CE=AB$，则

$ABEC$ 是平行四边形.




设 $G$ 是 $BE$ 的中点，$BC$ 交 $MG$ 于 $F$，则

$$F\text{ 是 }MG\text{ 的中点，}$$

$$MF=FG=\frac{1}{2}AB=3,$$

$$FN\text{ 是}\triangle BCD\text{ 的中位线，即 }FN=\frac{1}{2}CD=2.$$

设 $NG=x$，则

$$MN^2+NG^2=MF^2+FN^2+GF^2+FN^2=2(3^2+2^2),$$

即有

$$x^2=26-MN^2=18,$$

又

$$NG\text{ 是}\triangle BDE\text{ 的中位线，}$$

所以

$$DE^2=(2x)^2=4\times18=72,$$

$$\cos\angle DCE=\frac{CE^2+CD^2-DE^2}{2\cdot CD\cdot DE}=\frac{36+16-72}{2\times4\times6}=-\frac{5}{12},$$

因此，$m$ 与 $n$ 所成角的余弦值是 $\frac{5}{12}$.

解法 2：由题设可知

$$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}),$$

所以

$$(\overrightarrow{MN})^2=[\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})]^2,$$

则

$$(\overrightarrow{MN})^2=\frac{1}{4}[(\overrightarrow{AB})^2+(\overrightarrow{CD})^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}\cos<\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}>],$$

将 $AB=6$，$CD=4$，$MN=2\sqrt{2}$，代入上式并化简，得

$$\cos<\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}>=-\frac{5}{12},$$

因此，$m$ 与 $n$ 所成角的余弦值是 $\frac{5}{12}$.

三、解答题

21. $\Delta ABC$ 中，$AB=6, AC=10$，$O$ 是 $\Delta ABC$ 的外心，$\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，且 $x+2y=1$，求 $\Delta ABC$ 的面积.

答案：24 或 $5\sqrt{11}$.

解：设 $D$ 为 $AB$ 中点，则

$$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DO})\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2=18,$$

又因为 $$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=(x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AB}=36x+y\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC},$$

所以 $$36x+y\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=18, \quad ①$$

同理可得 $$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}=100y+x\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=50, \quad ②$$

联立①②两式，得 $$100y^2-36x^2=50y-18x, \quad ③$$

将 $x+2y=1$ 代入③，得

$$100y^2-36(1-2y)^2=50y-18(1-2y),$$

即 $$22y^2-29y+9=0,$$

解得 $$y=\frac{1}{2}，或 y=\frac{9}{11}.$$

当 $y=\frac{1}{2}$ 时，$x=0$；

当 $y=\frac{9}{11}$ 时，$x=-\frac{7}{11}$.

代入①式，得 $$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=36，或 \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=50.$$

又因为 $$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos A,$$

所以 $$\cos A=\frac{3}{5}，或 \cos A=\frac{5}{6},$$

注意到 $A$ 是三角形的内角，可得

$$\sin A=\frac{4}{5}，或 \sin A=\frac{\sqrt{11}}{6}.$$

于是 $$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\sin A=24,$$

或 $$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\sin A=5\sqrt{11}.$$

22.设$\alpha\ge\beta\ge\gamma\ge\frac{\pi}{12}$，且$\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$，求$\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\gamma$的最大值.(结果不含三角函数)

答案：$\frac{1}{8}(\sqrt{6}+\sqrt{2}-1)$.

解：由$\alpha\ge\beta\ge\gamma\ge\frac{\pi}{12}$，及$\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$，得

$$3\gamma\le\frac{\pi}{2}，即\ \gamma\le\frac{\pi}{6},$$

所以 $$\gamma\in[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6}].$$

设$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}-\gamma=2\varphi$，则存在$0\le\theta<\frac{\pi}{4}$，使得

$$\alpha=\varphi+\theta，\ \beta=\varphi-\theta,$$

于是有 $$\begin{aligned}M&=\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\gamma\\&=\sin(\varphi+\theta)\cdot\sin(\varphi-\theta)\cdot\cos\gamma\\&=(\sin\varphi\cos\theta+\cos\varphi\sin\theta)\cdot(\sin\varphi\cos\theta-\cos\varphi\sin\theta)\cdot\cos\gamma\\&=(\sin^2\varphi\cos^2\theta-\cos^2\varphi\sin^2\theta)\cdot\cos\gamma\\&=[\sin^2\varphi(1-\sin^2\theta)-\cos^2\varphi\sin^2\theta]\cdot\cos\gamma\\&=(\sin^2\varphi-\sin^2\theta)\cdot\cos\gamma\\&\le\sin^2\varphi\cdot\cos\gamma,\end{aligned}$$

当且仅当$\sin\theta=0$，即$\theta=0$，亦即$\alpha=\beta$时，等号成立.

所以　对于任意固定的$\gamma$，当且仅当$\alpha=\beta$时，$M$才有可能取得最大值$\sin^2\varphi\cdot\cos\gamma$.

又 $$\begin{aligned}\sin^2\varphi\cdot\cos\gamma&=\frac{1}{2}(1-\cos2\varphi)\cos\gamma\\&=\frac{1}{2}[1-\cos(\frac{\pi}{2}-\gamma)]\cos\gamma\\&=\frac{1}{2}(1-\sin\gamma)\cos\gamma\\&=\frac{1}{2}\cos\gamma-\frac{1}{4}\sin2\gamma.\end{aligned}$$

记$f(\gamma)=\frac{1}{2}\cos\gamma-\frac{1}{4}\sin2\gamma$，显然当$\gamma\in[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6}]$时，

$f(\gamma)$是单调递减函数，

所以当$\gamma=\dfrac{\pi}{12}$时，$f(\gamma)$有最大值$\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\pi}{12}-\dfrac{1}{4}\sin\dfrac{\pi}{6}$，

故 $M$的最大值是$\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\pi}{12}-\dfrac{1}{4}\sin\dfrac{\pi}{6}$.

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{12}-\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{6}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}}-\frac{1}{8}\\&=\frac{1}{4}\sqrt{2+\sqrt{3}}-\frac{1}{8}\\&=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{(1+\sqrt{3})^2}{2}}-\frac{1}{8}\\&=\frac{\sqrt{2}}{8}(1+\sqrt{3})-\frac{1}{8}\\&=\frac{1}{8}(\sqrt{6}+\sqrt{2}-1).\end{aligned}$$

23. 抛物线$S$的顶点在原点，焦点在$x$轴的正半轴上，若直线$x+y-1=0$与抛物线$S$交于$A$、$B$两点，且$|AB|=\dfrac{8\sqrt{6}}{11}$.

（1）求抛物线$S$的方程；

（2）抛物线$S$上是否存在点$C$，使得△$ABC$是等边三角形，若存在，求出点$C$的坐标；若不存在，说明理由.

答案：$y^2=\dfrac{4}{11}x$；$\left(\dfrac{25}{11},\dfrac{10}{11}\right)$.

解：（1）因为抛物线$S$的顶点在原点，焦点在$x$轴的正半轴上，所以可设抛物线$S$的方程为

$$y^2=2px(p>0).$$

由
$$\begin{cases}x+y-1=0\\ y^2=2px\end{cases}$$

消去$y$，得

$$x^2-2(p+1)x+1=0. \qquad (*)$$

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

由直线$x+y-1=0$与抛物线$S$相交于$A$、$B$两点，可知

$$x_1，x_2\text{是方程（*）的两个根，}$$

所以

$$x_1+x_2=2(p+1)，\ x_1x_2=1.$$

于是

$$
\begin{aligned}
|AB| &= \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} \\
&= \sqrt{(x_1-x_2)^2+[(1-x_1)-(1-x_2)]^2} \\
&= \sqrt{2}\cdot\sqrt{(x_1-x_2)^2} \\
&= \sqrt{2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2} \\
&= \sqrt{2}\cdot\sqrt{[2(p+1)]^2-4} \\
&= 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{p^2+2p}，
\end{aligned}
$$

又已知弦长 $|AB|=\dfrac{8\sqrt{6}}{11}$，所以

$$2\sqrt{2}\cdot\sqrt{p^2+2p}=\frac{8\sqrt{6}}{11}，$$

解得

$$p=\frac{2}{11}，\text{或 } p=-\frac{24}{11}\text{（舍去），}$$

故抛物线 $S$ 的方程是

$$y^2=\frac{4}{11}x.$$

（2）假设抛物线 $S$ 上存在满足条件的点 $C(x_3, y_3)$，

设 $AB$ 的中点是 $D(x_0, y_0)$，则

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=p+1=\frac{13}{11}，\ y_0=1-x_0=1-\frac{13}{11}=-\frac{2}{11}，$$

即

$$D(\frac{13}{11},-\frac{2}{11}).$$

因为△$ABC$ 是等边三角形，所以

$$CD\perp AB，\text{且}|CD|=\frac{\sqrt{3}}{2}|AB|=\frac{12\sqrt{2}}{11}.$$

由 $CD\perp AB$、直线 $AB$:$x+y-1=0$ 和 $D(\dfrac{13}{11},-\dfrac{2}{11})$，得直线 $CD$ 的方程是

$$y-(-\frac{2}{11})=x-\frac{13}{11}，$$

即

$$x-y=\frac{15}{11}，$$

又点 $C$ 在直线 $CD$ 上，所以

$$x_3 - y_3 = \frac{15}{11}. \qquad ①$$

由 $|CD| = \frac{12\sqrt{2}}{11}$，及点 $C$ 到直线 $AB$ 的距离公式，得

$$|x_3 + y_3 - 1| = \frac{24}{11}. \qquad ②$$

联立①②，解得

$$\begin{cases} x_3 = \frac{25}{11}, \\ y_3 = \frac{10}{11}, \end{cases} \text{或} \begin{cases} x_3 = \frac{1}{11}, \\ y_3 = -\frac{14}{11}. \end{cases}$$

经检验知，点 $(\frac{1}{11}, -\frac{14}{11})$ 不在抛物线 $S$： $y^2 = \frac{4}{11}x$ 上，所以满足题设的点 $C$ 的坐标是

$$C(\frac{25}{11}, \frac{10}{11}).$$

故 存在点 $C(\frac{25}{11}, \frac{10}{11})$，使得△$ABC$ 是等边三角形.