以模型为载体解决空间几何体的外接球与内切球问题

广东省广州市真光中学 (510380) 黄林盛

球是特殊的几何体, 具有多方位的对称性, 从而具有很多特殊的性质. 在高考以空间几何体为载体的外接球和内切球问题中, 因多面体有外接球或内切球是唯一的. 而唯一性使得外接球问题成为每高考的热点和难点. 主要考查学生空间想象能力为主线, 结合边角关系、位置关系、面积与体积的计算, 从而达到培养学生直观想象核心素养要求. 从高三第一轮复习教学实践中, 发现学生在研究空间几何体的外接球、内切球问题时, 常常因缺乏空间想象力而感到束手无策. 其根本原因是, 除了这类题目的入手确实不易之外, 主要是学生没有形成解题的模式和套路, 以至于遇到类似的题目便产生畏惧心理. 以下结合笔者的高三第一轮复习教学实例, 给出解空间几何外接球和内切球的问题八种模型方法, 供读者参考与交流.

类型一 墙角模型 (三条棱两两垂直, 不找球心的位置即可求出球半径)

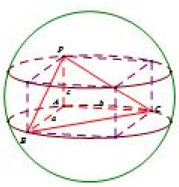

图 1-1

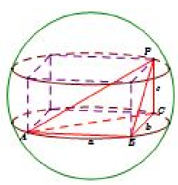

图 1-2

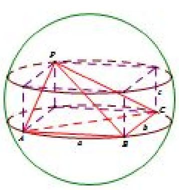

图 1-3

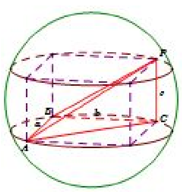

图 1-4

方法: 找三条两两垂直的线段, 直接用公式 $(2R)^2=a^2+b^2+c^2$, 即 $2R=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, 求出 R.

例 1 在正三棱锥 $S-ABC$ 中, M、N 分别是棱 SC、BC 的中点, 且 $AM\perp MN$, 若侧棱 $SA=2\sqrt{3}$, 求正三棱锥 $S-ABC$ 外接球的表面积?

解 引理: 正三棱锥的对棱互相垂直. 证明如下:

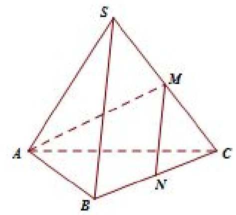

图 1-5

如图 1-5, 取 AB,BC 的中点 D,E, 连接 AE,CD, AE,CD 交于 H, 连接 SH, 则 H 是底面正三角形 ABC 的中心, 所以 $SH\perp$ 平面 ABC, 所以 $SH\perp AB$, 因为 $AC=BC$, $AD=BD$, 所以 $CD\perp AB$, 所以 $AB\perp$ 平面 SCD, 所以 $AB\perp SC$, 同理: $BC\perp SA$, $AC\perp SB$, 即正三棱锥的对棱互垂直.

本题图如图 1-5, 因为 $AM\perp MN$, $SB//MN$, 所以 $AM\perp SB$, 因为 $AC\perp SB$, 所以 $SB\perp$ 平面 SAC, 所以 $SB\perp SA$, $SB\perp SC$. 因为 $SB\perp SA$, $BC\perp SA$, 所以 $SA\perp$ 平面 SBC, 所以 $SA\perp SC$, 故三棱锥 $S-ABC$ 的三棱条侧棱两两互相垂直, 所以 $(2R)^2=(2\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3})^2=36$, 即 $4R^2=36$, 所以正三棱锥 $S-ABC$ 外接球的表面积是 36π.

类型二 对棱相等模型 (补形为长方体)

题型: 三棱锥 (即四面体) 中, 已知三组对棱分别相等 $(AB=CD, AD=BC, AC=BD)$, 求外接球半径.

第一步: 画出一个长方体, 标出三组互为异面直线的对棱;

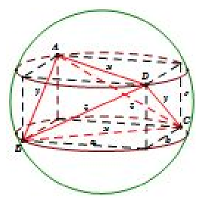

图 2-1

第二步: 设出长方体的长宽高分别为 a,b,c, $AD=BC=x$, $AB=CD=y$, $AC=BD=z$, 列方程组, $\begin{cases}a^2+b^2=x^2,\\ b^2+c^2=y^2,\\ c^2+a^2=z^2,\end{cases}\Rightarrow (2R)^2=a^2+b^2+c^2=\dfrac{x^2+y^2+z^2}{2}$.

补充: 图 2-1 中, $V_{A-BCD}=abc-\dfrac{1}{6}abc\times 4=\dfrac{1}{3}abc$.

第三步: 根据墙角模型, $2R=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2+z^2}{2}}$, $R=\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2+z^2}{8}}$, 求出 R.

例 2 在三棱锥 $A-BCD$ 中, $AB=CD=2$, $AD=BC=3$, $AC=BD=4$, 求三棱锥 $A-BCD$ 外接球的表面积?

解 如图 2-1, 设补形为长方体, 三个长度为三对面的对

角线长, 设长宽高分别为 a,b,c, 则 $a^2+b^2=9,b^2+c^2=4$, $c^2+a^2=16$, 所以 $2(a^2+b^2+c^2)=9+4+16=29$, $a^2+b^2+c^2=\frac{29}{2},4R^2=\frac{29}{2},S=\frac{29}{2}\pi$.

类型三　汉堡模型 (直棱柱的外接球、圆柱的外接球)

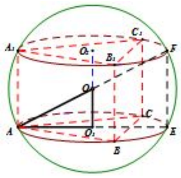
图 3-1

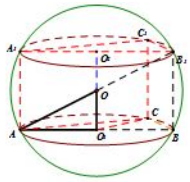
图 3-2

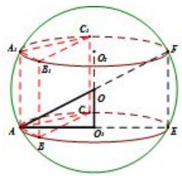
图 3-3

题型: 如图 3-1, 图 3-2, 图 3-3, 直三棱柱内接于球 (同时直棱柱也内接于圆柱, 棱柱的上下底面可以是任意三角形)

第一步: 确定球心 O 的位置, O_1 是 $\triangle ABC$ 的外心, 则 $OO_1\perp$ 平面 ABC;

第二步: 算出小圆 O_1 的半径 $AO_1=r$, $OO_1=\frac{1}{2}AA_1=\frac{1}{2}h$ ($AA_1=h$ 也是圆柱的高);

第三步: 勾股定理: $OA^2=O_1A^2+O_1O^2\Rightarrow R^2=\left(\frac{h}{2}\right)^2+r^2\Rightarrow R=\sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2+r^2}$, 解出 R.

例 3　一个正六棱柱的底面上正六边形, 其侧棱垂直于底面, 已知该六棱柱的顶点都在同一个球面上, 且该六棱柱的体积为 $\frac{9}{8}$, 底面周长为 3, 求这个球的体积?

解　设正六边形边长为 a, 正六棱柱的高为 h, 底面外接圆的半径为 r, 则 $a=\frac{1}{2}$, 正六棱柱的底面积为 $S=6\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3\sqrt{3}}{8}$, $V_{柱}=Sh=\frac{3\sqrt{3}}{8}h=\frac{9}{8}$, 所以 $h=\sqrt{3}$, $4R^2=1^2+(\sqrt{3})^2=4$, 也可 $R^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=1$), $R=1$, 球的体积为 $V_{球}=\frac{4\pi}{3}$;

类型四　切瓜模型 (两个大小圆面互相垂直且交于小圆直径——正弦定理求大圆直径是通法)

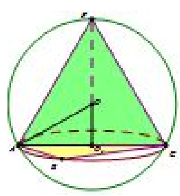
图 4-1

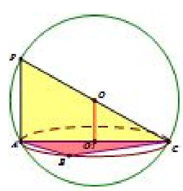
图 4-2

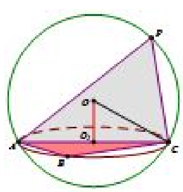
图 4-3

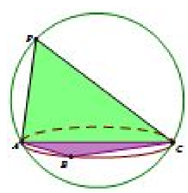
图 4-4

1. 如图 4-1, 平面 $PAC\perp$ 平面 ABC, 且 $AB\perp BC$ (即 AC 为小圆的直径), 且 P 的射影是 $\triangle ABC$ 的外心 $\Leftrightarrow$ 三棱锥 $P-ABC$ 的三条侧棱相等 $\Leftrightarrow$ 三棱锥 $P-ABC$ 的底面 $\triangle ABC$ 在圆锥的底上, 顶点 P 点也是圆锥的顶点.

解题步骤:

第一步: 确定球心 O 的位置, 取 $\triangle ABC$ 的外心 O_1, 则 P,O,O_1 三点共线;

第二步: 先算出小圆 O_1 的半径 $AO_1=r$, 再算出棱锥的高 $PO_1=h$ (也是圆锥的高);

第三步: 勾股定理: $OA^2=O_1A^2+O_1O^2\Rightarrow R^2=(h-R)^2+r^2$, 解出 R;

事实上, $\triangle ACP$ 的外接圆就是大圆, 直接用正弦定理也可求解出 R.

2. 如图 4-2, 平面 $PAC\perp$ 平面 ABC, 且 $AB\perp BC$ (即 AC 为小圆的直径), 且 $PA\perp AC$, 则利用勾股定理求三棱锥的外接球半径:

① $(2R)^2=PA^2+(2r)^2\Leftrightarrow 2R=\sqrt{PA^2+(2r)^2}$;

② $R^2=r^2+OO_1^2\Leftrightarrow R=\sqrt{r^2+OO_1^2}$.

3. 如图 4-3, 平面 $PAC\perp$ 平面 ABC, 且 $AB\perp BC$ (即 AC 为小圆的直径).

$OC^2=O_1C^2+O_1O^2\Leftrightarrow R^2=r^2+O_1O^2\Leftrightarrow AC=2\sqrt{R^2-O_1O^2}$

4. 题型: 平面 $PAC\perp$ 平面 ABC, 且 $AB\perp BC$ (即 AC 为小圆的直径).

第一步: 易知球心 O 必是 $\triangle PAC$ 的外心, 即 $\triangle PAC$ 的外接圆是大圆, 先求出小圆的直径 $AC=2r$;

第二步: 在 $\triangle PAC$ 中, 可根据正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$, 求出 R.

例 4　一个正三棱锥的四个顶点都在半径为 1 的球面上, 其中底面的三个顶点在该球的一个大圆上, 求该正三棱锥的体积?

解　高 $h=R=1$, 底面外接圆的半径为 $R=1$, 直径为 $2R=2$, 设底面边长为 a, 则 $2R=\frac{a}{\sin 60^\circ}=2$, $a=\sqrt{3}$, $S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{3\sqrt{3}}{4}$, 三棱锥的体积为 $V=\frac{1}{3}Sh=\frac{\sqrt{3}}{4}$;

类型五　垂面模型 (一条直线垂直于一个平面)

1. 题型: 如图 5-1, $PA\perp$ 平面 ABC, 求外接球半径.

解题步骤:

第一步: 将 $\triangle ABC$ 画在小圆面上, A 为小圆直径的一个端点, 作小圆的直径 AD, 连接 PD, 则 PD 必过球心 O;

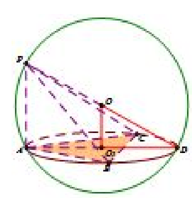
图 5-1

第二步: O_1 为 $\triangle ABC$ 的外心, 所以 $OO_1\perp$ 平面 ABC, 算出小圆 O_1 的半径 $O_1D=r$ (三角形的外接圆直径算法: 利用正弦定理, 得 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2r$), $OO_1=\dfrac{1}{2}PA$;

第三步: 利用勾股定理求三棱锥的外接球半径:

① $(2R)^2=PA^2+(2r)^2\Leftrightarrow 2R=\sqrt{PA^2+(2r)^2}$;

② $R^2=r^2+OO_1^2\Leftrightarrow R=\sqrt{r^2+OO_1^2}$.

2. 题型: 如图 5-2 至 5-8 这七个图形, P 的射影是 $\triangle ABC$ 的外心 $\Leftrightarrow$ 三棱锥 $P-ABC$ 的三条侧棱相等 $\Leftrightarrow$ 三棱锥 $P-ABC$ 的底面 $\triangle ABC$ 在圆锥的底上, 顶点 P 点也是圆锥的顶点.

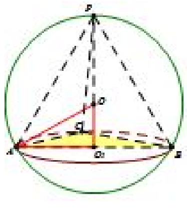

图 5-2

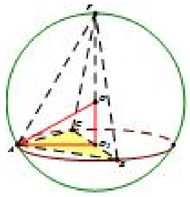

图 5-3

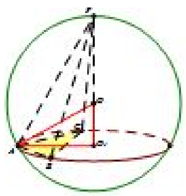

图 5-4

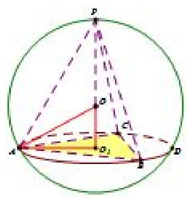

图 5-5

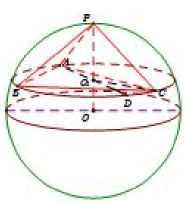

图 5-6

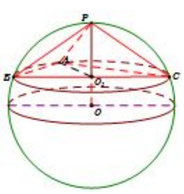

图 5-7

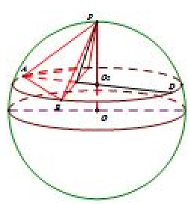

图 5-8

解题步骤:

第一步: 确定球心 O 的位置, 取 $\triangle ABC$ 的外心 O_1, 则 P,O,O_1 三点共线;

第二步: 先算出小圆 O_1 的半径 $AO_1=r$, 再算出棱锥的高 $PO_1=h$ (也是圆锥的高);

第三步: 勾股定理: $OA^2=O_1A^2+O_1O^2\Rightarrow R^2=(h-R)^2+r^2$, 解出 R.

方法二: 小圆直径参与构造大圆, 用正弦定理求大圆直径得球的直径.

例 5 一个几何体的三视图如图所示, 求该几何体外接球的表面积?

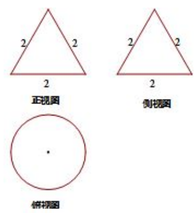

图 5-9

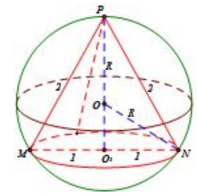

图 5-10

解 如图 5-10 所示,

法一 (勾股定理) 利用球心的位置求球半径, 球心在圆锥的高线上, $(\sqrt{3}-R)^2+1=R^2$, $R=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, $S=4\pi R^2=\dfrac{16}{3}\pi$;

法二 (大圆法求外接球直径) 如图, 球心在圆锥的高线上, 故圆锥的轴截面三角形 PMN 的外接圆是大圆, 于是 $2R=\dfrac{2}{\sin 60^\circ}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$, 下略;

类型六 折叠模型

题型: 两个全等三角形或等腰三角形拼在一起, 或菱形折叠 (如图 6-1)

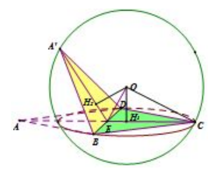

图 6-1

第一步: 先画出如图 6-1 所示的图形, 将 $\triangle BCD$ 画在小圆上, 找出 $\triangle BCD$ 和 $\triangle A'BD$ 的外心 H_1 和 H_2;

第二步: 过 H_1 和 H_2 分别作平面 BCD 和平面 $A'BD$ 的垂线, 两垂线的交点即为球心 O, 连接 OE,OC;

第三步: 解 $\triangle OEH_1$, 算出 OH_1, 在 $\mathrm{Rt}\triangle OCH_1$ 中, 勾股定理: $OH_1^2+CH_1^2=OC^2$.

注: 易知 O,H_1,E,H_2 四点共面且四点共圆, 证略.

例 6 在边长为 $2\sqrt{3}$ 的菱形 $ABCD$ 中, $\angle BAD=60^\circ$, 沿对角线 BD 折成二面角 $A-BD-C$ 为 120° 的四面体 $ABCD$, 求此四面体的外接球表面积?

解 如图 6-2, 取 BD 的中点 M, $\triangle ABD$ 和 $\triangle CBD$ 的外接圆半径为 $r_1=r_2=2$, $\triangle ABD$ 和 $\triangle CBD$ 的外心 O_1,O_2 到弦 BD 的距离 (弦心距) 为 $d_1=d_2=1$,

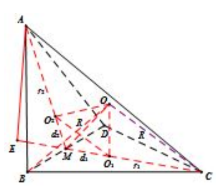

图 6-2

法一: 四边形 OO_1MO_2 的外接圆直径 $OM=2$, $R=\sqrt{7}$, $S=28\pi$;

法二: $OO_1=\sqrt{3}$, $R=\sqrt{7}$;

法三: 作出 $\triangle CBD$ 的外接圆直径 CE, 则 $AM = CM = 3$, $CE = 4$, $ME = 1$, $AE = \sqrt{7}$, $AC = 3\sqrt{3}$, $\cos\angle AEC = \dfrac{7+16-27}{2\cdot\sqrt{7}\cdot 4} = -\dfrac{1}{2\sqrt{7}}$, $\sin\angle AEC = \dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$, $2R = \dfrac{AC}{\sin\angle AEC} = \dfrac{3\sqrt{3}}{\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}} = 2\sqrt{7}$, $R = \sqrt{7}$;

类型七 两直角三角形拼接在一起 (斜边相同, 也可看作矩形沿对角线折起所得三棱锥) 模型

题型: 如图 7-1, $\angle APB = \angle ACB = 90°$, 求三棱锥 $P-ABC$ 外接球半径 (分析: 取公共的斜边的中点 O, 连接 OP, OC, 则 $OA = OB = OC = OP = \dfrac{1}{2}AB$, 所以 O 为三棱锥 $P-ABC$ 外接球球心, 然后在 OCP 中求出半径) , 当看作矩形沿对角线折起所得三棱锥时与折起成的二面角大小无关, 只要不是平角, 球半径都为定值.

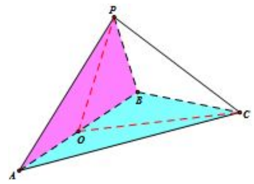

图 7-1

例 7 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 4$, $BC = 3$, 沿 AC 将矩形 $ABCD$ 折成一个直二面角 $B-AC-D$, 求四面体 $ABCD$ 的外接球的体积?

解 $2R = AC = 5$, $R = \dfrac{5}{2}$, $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3}\pi\dfrac{125}{8} = \dfrac{125\pi}{6}$

类型八 锥体的内切球问题

1. 题型: 如图 8-1, 三棱锥 $P-ABC$ 上正三棱锥, 求其内切球的半径.

第一步: 先现出内切球的截面图, E, H 分别是两个三角形的外心;

第二步: 求 $DH = \dfrac{1}{3}CD$, $PO = PH - r$, PD 是侧面 $\triangle ABP$ 的高;

第三步: 由 $\triangle POE$ 相似于 $\triangle PDH$, 建立等式: $\dfrac{OE}{DH} = \dfrac{PO}{PD}$, 解出 r.

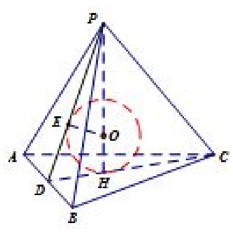

图 8-1

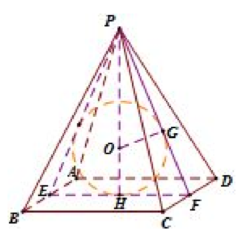

图 8-2

2. 题型: 如图 8-2, 四棱锥 $P-ABCD$ 是正四棱锥, 求其内切球的半径

第一步: 先画出内切球的截面图, P, O, H 三点共线;

第二步: 求 $FH = \dfrac{1}{2}BC$, $PO = PH - r$, PF 是侧面 $\triangle PCD$ 的高;

第三步: 由 $\triangle POG$ 相似于 $\triangle PFH$, 建立等式: $\dfrac{OG}{HF} = \dfrac{PO}{PF}$, 解出 r.

3. 题型: 三棱锥 $P-ABC$ 是任意三棱锥, 求其的内切球半径

方法: 等体积法, 即三棱锥的体积可以表示成: 内切球球心为顶点, 分别以四个面为底面所构成的四个三棱锥的体积之和.

第一步: 先画出四个表面的面积和整个锥体体积;

第二步: 设内切球的半径为 r, 建立等式: $V_{P-ABC} = V_{O-ABC} + V_{O-PAB} + V_{O-PAC} + V_{O-PBC} \Rightarrow V_{P-ABC} = \dfrac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot r + \dfrac{1}{3}S_{\triangle PAB}\cdot r + \dfrac{1}{3}S_{\triangle PAC}\cdot r + \dfrac{1}{3}S_{\triangle PBC}\cdot r = \dfrac{1}{3}(S_{\triangle ABC} + S_{\triangle PAB} + S_{\triangle PAC} + S_{\triangle PBC})\cdot r$.

第三步: 解出 $r = \dfrac{3V_{P-ABC}}{S_{\triangle ABC} + S_{\triangle PAB} + S_{\triangle PAC} + S_{\triangle PBC}}$.

例 8 正四棱锥 $S-ABCD$ 的底面边长为 2, 侧棱长为 3, 求其内切球的半径?

解 如图 8-3, 正四棱锥 $S-ABCD$ 的高 $h = \sqrt{7}$, 正四棱锥 $S-ABCD$ 的体积为 $V_{S-ABCD} = \dfrac{4\sqrt{7}}{3}$, 侧面斜高 $h_1 = 2\sqrt{2}$, 正四棱锥 $S-ABCD$ 的表面积为 $S_{表} = 4 + 8\sqrt{2}$, 正四棱锥 $S-ABCD$ 的体积为 $V_{S-ABCD} = \dfrac{1}{3}S_{表}r = \dfrac{4+8\sqrt{2}}{3}\cdot r$, 所以 $\dfrac{4+8\sqrt{2}}{3}\cdot r = \dfrac{4\sqrt{7}}{3}$, $r = \dfrac{4\sqrt{7}}{4+8\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{7}}{1+2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{7}(2\sqrt{2}-1)}{7} = \dfrac{2\sqrt{14}-\sqrt{7}}{7}$.

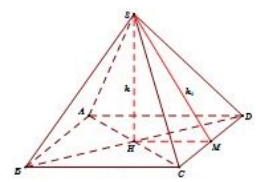

图 8-3

空间几何本外接球和内切球的问题, 考查了根据图形想象出直观形象; 能正确地分析出图形中的基本元素及其相互关系; 能对图形进行分解、组合; 会运用图形与图表等手段形象地揭示问题的本质, 很符合数学学科六大核心素养的培养. 数学的学习过程应立足于提高抽象概括能力、推理论证能力、空间想象能力、数学建模能力、运算求解能力、数据处理能力实践与探究, . 更应该贯穿整个高三复习. 本文通过以模型为载体解决空间几何体的外接球与内切球问题的归纳总结与反思, 不仅帮助学生解决了球体的热点难点问题, 更让在学生在学习过程中, 进一步发展几何直观和空间想象能力, 增强运用图形和空间想象思考问题的意识, 提升数形结合的能力, 感悟事物的本质, 培养创新思维, 直观想象核心素养的探究过程中得到培养.

参考文献

[1] 黄喜滨, 江泽. 基于核心素养的空间几何体外接球之探究 [J]. 福建中学数学, 2017(8): 15-18.

[2] 杨瑞强. 高考中关于" 球" 的计算问题分类解读 [J]. 数学教学通讯, 2007(24).