

镇江市 2021 届高三名校 10 月考试卷

2020 年 10 月 5 日

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{y | y = 3^x\}$, $B = \{0, 1, 2, 3\}$, 则 $A \cap B =$ ()

A. $\{1, 2, 3\}$ B. $(0, +\infty)$ C. $\{0, 1, 2\}$ D. $[0, +\infty)$

2. 复数 $z(1-i) = 2i$ (i 为虚数单位), 则 z 等于 ()

A. $1+i$ B. $1-i$ C. $-1+i$ D. $-1-i$

3. 若从甲、乙、丙、丁 4 人中选出 3 名代表参加学校会议, 则甲被选中的概率为 ()

A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{3}{4}$

4. 下列函数中, 既是奇函数又在区间 $(-1, 1)$ 上是增函数的是 ()

A. $y = \frac{1}{x}$ B. $y = \tan x$ C. $y = -\sin x$ D. $y = \cos x$

5. 若 $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{1}{3}$, 则 $\tan \alpha$ 等于 ()

A. -2 B. $\frac{3}{4}$ C. $-\frac{4}{3}$ D. 2

6. 已知菱形 $ABCD$ 的边长为 4, $\angle ABC = 60^\circ$, E 是 BC 的中点,

$\overrightarrow{DF} = -2\overrightarrow{AF}$, 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BF} =$ ()

A. 24 B. -7
C. -10 D. -12

7. 《周髀算经》是中国古代重要的数学著作, 其记载的“日月历法”曰: “阴阳之数, 日月之法, 十九岁为一章, 四章为一部, 部七十六岁, 二十部为一遂, 遂千百五十二岁, ... 生数皆终, 万物复苏, 天以更元作纪历”, 某老年公寓住有 20 位老人, 他们的年龄 (都为正整数) 之和恰好为一遂, 其中年长者已是奔百之龄 (年龄介于 90 至 100), 其余 19 人的年龄依次相差一岁, 则年长者的年龄为 ()

A. 94 B. 95 C. 96 D. 98

8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \ln x, & x > 1 \\ \frac{1}{4}x + 1, & x \leq 1 \end{cases}$, $g(x) = ax$ 则方程 $g(x) = f(x)$ 恰有两个不同的实根

时, 实数 a 的取值范围是 ().

- A. $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ B. $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{e}\right)$ C. $\left(0, \frac{1}{4}\right]$ D. $\left(\frac{1}{4}, e\right)$

二、选择题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 3 分。

9. 设正实数 a, b 满足 $a + b = 1$, 则下列结论正确的是 ()

- A. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 有最小值 4 B. $\sqrt{ab}$ 有最小值 $\frac{1}{2}$
C. $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ 有最大值 $\sqrt{2}$ D. $a^2 + b^2$ 有最小值 $\frac{1}{2}$

10. 将函数 $y = \cos x$ 的图象向左平移 $\frac{3\pi}{2}$ 个单位, 得到函数 $y = f(x)$ 的函数图象, 则下列说法正确的是 ()

- A. $y = f(x)$ 是奇函数 B. $y = f(x)$ 的周期是 π
C. $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称 D. $y = f(x)$ 的图象关于 $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 对称

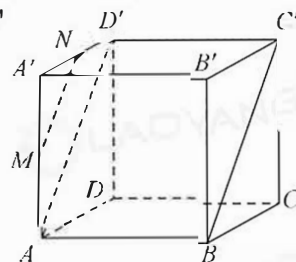
11. 如图, 正方体 $ABCD - A'B'C'D'$ 的棱长为 1, 则下列四个命题正确的是 ()

A. 若点 M, N 分别是线段 $A'A, A'D'$ 的中点, 则 $MN \parallel BC'$

B. 点 C 到平面 $ABC'D'$ 的距离为 $\sqrt{2}$

C. 直线 BC 与平面 $ABC'D'$ 所成的角等于 $\frac{\pi}{4}$

D. 三棱柱 $AA'D' - BB'C'$ 的外接球的表面积为 3π



12. 关于函数 $f(x) = e^x - ax$, $x \in \mathbf{R}$, 其中 e 为自然对数, 下列说法正确的是 ()

- A. 当 $a = 1$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增
B. 当 $a = 0$ 时, $f(x) - \ln x \geq 3$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 上恒成立
C. 对任意 $a < 0$, $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上一定存在零点
D. 存在 $a > 0$, $f(x)$ 有唯一极小值

$$a_1 = b_1, \quad d = q,$$

(1) 求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 记 $c_n = \frac{a_n}{b_n}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分.

20. (本小题满分 12 分) 华为手机的“麒麟 970”芯片在华为处理器排行榜中最高主频

2.4GHz, 同时它的线程结构也做了很大的改善, 整个性能及效率至少提升了 50%, 科研人员曾就是否需采用西门子制程这一工艺标准进行了反复比较, 在一次实验中, 工作人员对生产出的 50 片芯片进行研究, 结果发现使用了该工艺的 30 片芯片有 28 片线程结构有很大的改善, 没有使用该工艺的 20 片芯片中有 12 片线程结构有很大的改善.

(1) 完善列联表判断: 这次实验是否有 99.5% 的把握认为“麒麟 970”芯片的线程结构有很大的改善与使用西门子制程这一工艺标准有关?

(2) 在“麒麟 970”芯片的线程结构有很大的改善后, 接下来的生产制作还需对芯片的晶圆依次进行金属溅镀, 涂布光阻, 蚀刻技术, 光阻去除这四个环节的精密操作, 进而得到多晶的晶圆, 生产出来的多晶的晶圆经过严格的质检, 确定合格后才能进入下一个流程. 如果生产出来的多晶的晶圆在质检中不合格, 那么必须依次对前四个环节进行技术检测并对所有的出错环节进行修复才能成为合格品. 在实验的初期, 由于技术的不成熟, 生产制作的多晶的晶圆很难达到理想状态, 研究人员根据以往的数据与经验得知在实验生产多晶的晶圆的过程中, 前三个环节每个环节生产正常的概率为 $\frac{2}{3}$, 每个环节出错需要修复的费用均为

200 元，第四环节生产正常的概率为 $\frac{3}{4}$ ，此环节出错需要修复的费用为 100 元，问：一次试验生产出来的多晶的晶圆要成为合格品大约还需要消耗多少元费用？（假设质检与检测过程不产生费用）

参考公式： $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ， $n = a+b+c+d$.

参考数据：

$P(K^2 \geq k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001
k_0	2.072	2.076	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

21. (本小题满分 12 分)已知抛物线 C 的顶点在原点,焦点在坐标轴上, 点 $A(1,2)$ 为抛物线 C 上一点. (1) 求 C 的方程;

(2) 若点 $B(1,-2)$ 在 C 上, 过 B 作 C 的两弦 BP 与 BQ , 若 $k_{BP} \cdot k_{BQ} = -2$, 求证: 直线 PQ 过定点.

22. (本小题满分 12 分)已知函数 $f(x) = e^x - 1 - x - ax^2$.

(1) 当 $x \geq 0$ 时, 若不等式 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围;

(2) 若 $x > 0$, 证明 $(e^x - 1)\ln(x+1) > x^2$.

参考答案

一、单选题

1. A 2. C 3. D 4. B

5. A 6. D 7. B 8. B

二、多选题

9. ACD 10. AC 11. ACD 12. CD

三、填空题

13. 0.2 14. $\frac{15}{2}$ 15. $(6+\sqrt{3})$ 米 (不写单位扣分) 16. e^4

四、解答题

17. 已知平面向量 $\vec{a} = (2\cos\theta, 1)$, $\vec{b} = (1, 3\sin\theta)$.

(1) 若 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 求 $\sin 2\theta$ 的值;

(2) 若 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 求 $\tan\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$ 的值.

【解析】

(1) $\because$ 平面向量 $\vec{a} = (2\cos\theta, 1)$, $\vec{b} = (1, 3\sin\theta)$, $\vec{a} \parallel \vec{b}$,

$$\therefore (2\cos\theta) \times (3\sin\theta) - 1 \times 1 = 0, \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

解得 $6\sin\theta\cos\theta - 1 = 3\sin 2\theta - 1 = 0$,

$$\therefore \sin 2\theta = \frac{1}{3}. \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(2) $\because \vec{a} \perp \vec{b}$, $\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 2\cos\theta + 3\sin\theta = 0$,

$$\therefore 2\cos\theta = -3\sin\theta, \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

若 $\cos\theta = 0$, 则 $|\sin\theta| = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = 1$, 不满足上式, 舍, $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

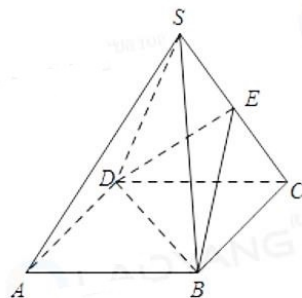
$$\therefore \cos\theta \neq 0, \quad \tan\theta = -\frac{2}{3}, \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\therefore \tan\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\theta + 1}{1 - \tan\theta} = \frac{-\frac{2}{3} + 1}{1 - (-\frac{2}{3})} = \frac{1}{5}. \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

18. 如图，正四棱锥 $S-ABCD$ 中， $SA=4$ ， $AB=2$ ， E 为 SC 中点.

(1) 求证： $SA \parallel$ 平面 BDE ；

(2) 求异面直线 SA 与 BE 所成角的余弦值.



【解析】

证明：(1) 连接 AC ，交 BD 于点 O ，连接 OE .

$\because$ 四棱锥 $S-ABCD$ 为正四棱锥，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，2 分

$\therefore O$ 为 AC 中点，

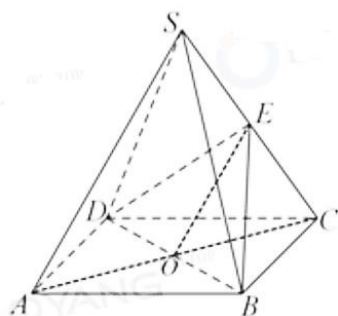
$\because E$ 为 SC 中点，

$\therefore OE$ 为 $\triangle SAC$ 的中位线，

$\therefore OE \parallel SA$ ，3 分

$\because OE \subset$ 平面 BDE ， $SA \not\subset$ 平面 BDE ，

$\therefore SA \parallel$ 平面 BDE 6 分



(2) 由 (1) 知: $OE \parallel SA$,

故 $\angle BEO$ (或其补角) 为异面直线 SA 与 BE 所成的角.8 分

$$\because SA = SB = SC = SD = 4, \quad AB = 2,$$

$$\therefore OE = 2, \quad OB = OD = \frac{1}{2}BD = \sqrt{2}.$$

由四棱锥 $S-ABCD$ 为正四棱锥知: $\triangle SCB \cong \triangle SCD$.

$\therefore E$ 为 SC 中点,

$$\therefore EB = ED,$$

$$\therefore OE \perp BD, \text{ 即 } \angle BOE = 90^\circ. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\therefore BE = \sqrt{OE^2 + OB^2} = \sqrt{6},$$

$$\therefore \cos \angle BEO = \frac{OE}{BE} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

即异面直线 SA 与 BE 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$12 分

19. 在① $a_3 = 5$, $a_2 + a_5 = 6b_2$; ② $b_2 = 2$, $a_3 + a_4 = 3b_3$; ③ $S_3 = 9$, $a_4 + a_5 = 8b_2$, 这三个条件中任选一个, 补充在下面问题中, 并解答.

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ($d > 1$), 前 n 项和为 S_n , 等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q , 且 $a_1 = b_1$, $d = q$, _____.

(1) 求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 记 $c_n = \frac{a_n}{b_n}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n . 注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分.

【解析】

方案一：选条件①

$$(1) \because a_3 = 5, a_2 + a_5 = 6b_2, a_1 = b_1, d = q, d > 1$$

$$\therefore \begin{cases} a_1 + 2d = 5 \\ 2a_1 + 5d = 6a_1d \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a_1 = 1 \\ d = 2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a_1 = \frac{25}{6} \\ d = \frac{5}{12} \end{cases} \quad (\text{舍去}) \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\therefore \begin{cases} b_1 = 1 \\ q = 2 \end{cases}$$

$$\therefore a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$= 2n - 1 \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$b_n = b_1 q^{n-1} = 2^{n-1} \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$(2) \because c_n = \frac{a_n}{b_n}$$

$$\therefore c_n = \frac{2n-1}{2^{n-1}} = (2n-1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore T_n = 1 + 3 \times \frac{1}{2} + 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + (2n-3) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + (2n-1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \frac{1}{2} T_n = \frac{1}{2} + 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + (2n-3) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + (2n-1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\therefore \frac{1}{2} T_n = 1 + 2 \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right] - (2n-1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$= 1 + 2 \times \frac{\frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right]}{1 - \frac{1}{2}} - (2n-1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= 3 - (2n+3) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\therefore T_n = 6 - (2n+3) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

方案二：选条件②

$$(1) \quad \because b_2 = 2, a_3 + a_4 = 3b_3, a_1 = b_1, d = q, d > 1$$

$$\therefore \begin{cases} a_1 d = 2 \\ 2a_1 + 5d = 3a_1 d^2 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} a_1 d = 2 \\ 2a_1 + 5d = 6d \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a_1 = 1 \\ d = 2 \end{cases} \text{或} \begin{cases} a_1 = -1 \\ d = -2 \end{cases} \quad (\text{舍去}) \dots\dots\dots 3 \text{分}$$

$$\therefore \begin{cases} b_1 = 1 \\ q = 2 \end{cases}$$

$$\therefore a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$= 2n-1 \quad \dots\dots\dots 5 \text{分}$$

$$b_n = b_1 q^{n-1} = 2^{n-1} \quad \dots\dots\dots 7 \text{分}$$

$$(2) \quad \because c_n = \frac{a_n}{b_n}$$

$$\therefore c_n = \frac{2n-1}{2^{n-1}} = (2n-1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore T_n = 1 + 3 \times \frac{1}{2} + 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + (2n-3) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + (2n-1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \frac{1}{2} T_n = \frac{1}{2} + 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + (2n-3) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + (2n-1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\therefore \frac{1}{2} T_n = 1 + 2 \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right] - (2n-1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= 1 + 2 \times \frac{\frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right]}{1 - \frac{1}{2}} - (2n-1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= 3 - (2n+3) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\therefore T_n = 6 - (2n+3) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

方案三：选条件③

$$\therefore S_3 = 9, a_4 + a_5 = 8b_2, a_1 = b_1, d = q, d > 1$$

$$\therefore \begin{cases} a_1 + d = 3 \\ 2a_1 + 7d = 8a_1d \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a_1 = 1 \\ d = 2 \end{cases} \text{或} \begin{cases} a_1 = \frac{21}{8} \\ d = \frac{3}{8} \end{cases} \quad (\text{舍去}) \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\begin{cases} b_1 = 1 \\ q = 2 \end{cases}$$

$$\therefore a_n = a_1 + (n-1)d = 2n-1 \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$b_n = b_1 q^{n-1} = 2^{n-1} \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$(2) \because c_n = \frac{a_n}{b_n}$$

$$\therefore c_n = \frac{2n-1}{2^{n-1}} = (2n-1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore T_n = 1 + 3 \times \frac{1}{2} + 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + (2n-3) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + (2n-1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \frac{1}{2} T_n = \frac{1}{2} + 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + (2n-3) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + (2n-1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\therefore \frac{1}{2} T_n = 1 + 2 \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right] - (2n-1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= 1 + 2 \times \frac{\frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right]}{1 - \frac{1}{2}} - (2n-1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= 3 - (2n + 3) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\therefore T_n = 6 - (2n + 3) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

20. 华为手机的“麒麟 970”芯片在华为处理器排行榜中最高主频 2.4GHz，同时它的线程结构也做了很大的改善，整个性能及效率至少提升了 50%，科研人员曾就是否需采用西门子制程这一工艺标准进行了反复比较，在一次实验中，工作人员对生产出的 50 片芯片进行研究，结果发现使用了该工艺的 30 片芯片有 28 片线程结构有很大的改善，没有使用该工艺的 20 片芯片中有 12 片线程结构有很大的改善。

(1) 用列联表判断：这次实验是否有 99.5% 的把握认为“麒麟 970”芯片的线程结构有很大的改善与使用西门子制程这一工艺标准有关？

(2) 在“麒麟 970”芯片的线程结构有很大的改善后，接下来的生产制作还需对芯片的晶圆依次进行金属溅镀，涂布光阻，蚀刻技术，光阻去除这四个环节的精密操作，进而得到多晶的晶圆，生产出来的多晶的晶圆经过严格的质检，确定合格后才能进入下一个流程。如果生产出来的多晶的晶圆在质检中不合格，那么必须依次对前四个环节进行技术检测并对所有的出错环节进行修复才能成为合格品。在实验的初期，由于技术的不成熟，生产制作的多晶的晶圆很难达到理想状态，研究人员根据以往的数据与经验得知在实验生产多晶的晶圆的过程中，前三个环节每个环节生产正常的概率为 $\frac{2}{3}$ ，每个环节出错需要修复的费用均为 200 元，第四环节生产正常的概率为 $\frac{3}{4}$ ，此环节出错需要修复的费用为 100 元，问：一次试验生产出来的多晶的晶圆要成为合格品大约还需要消耗多少元费用？（假设质检与检测过程不产生费用）

$$\text{参考公式: } K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, \quad n = a + b + c + d.$$

参考数据：

$P(K^2 \geq k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001
k_0	2.072	2.076	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

【解析】

(1) 由题意列联表为:

	使用工艺	不使用工艺	合计
合格	28	12	40
不合格	2	8	10
合计	30	20	50

.....1 分

$$\text{故 } K^2 = \frac{50(28 \times 8 - 2 \times 12)^2}{30 \times 20 \times 40 \times 10} = \frac{25}{3} > 7.879, \quad \text{.....2 分}$$

故有 99.5% 的把握认为“麒麟 970”芯片的线性结构有很大的改善与使用西门子制程这一工艺技术有关.

.....3 分

(2) 设 A_i 表示检测到第 i 个环节有问题 ($i = 1, 2, 3, 4$), X 表示成为一个合格的多晶的晶圆需消耗的费用, 则 X 的可能取值为: 0, 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700,

$$X = 0 \text{ 表明四个环节均正常 } P(X = 0) = P(\overline{A_1 A_2 A_3 A_4}) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{3}{4} = \frac{24}{108},$$

$$X = 100 \text{ 表明第四环节有问题 } P(X = 100) = P(\overline{A_1 A_2 A_3} A_4) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{8}{108},$$

$$X = 200 \text{ 表明前三环节有一环节有问题 } P(X = 200) = C_3^1 \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{36}{108},$$

$X = 300$ 表明前三环节有一环节及第四环节有问题

$$P(X=300)=C_3^1\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{4}=\frac{12}{108},$$

$$X=400 \text{ 表明前三环节有两环节有问题 } P(X=400)=C_3^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{3}{4}=\frac{18}{108},$$

$X=500$ 表明前三环节有两环节及第四环节有问题

$$P(X=500)=C_3^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{4}=\frac{6}{108},$$

$$X=600 \text{ 表明前三环节有问题 } P(X=600)=P(A_1A_2A_3\overline{A_4})=\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{108}$$

$$X=700 \text{ 表明四个环节均有问题 } P(X=700)=P(A_1A_2A_3A_4)=\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{108}.$$

费用 X 分布列为:

X	0	100	200	300	400	500	600	700
P	$\frac{24}{108}$	$\frac{8}{108}$	$\frac{36}{108}$	$\frac{12}{108}$	$\frac{18}{108}$	$\frac{6}{108}$	$\frac{3}{108}$	$\frac{1}{108}$

.....9 分

$$\text{故 } E(X) = \frac{0 \times 24 + 100 \times 8 + 200 \times 36 + 300 \times 12 + 400 \times 18 + 500 \times 6 + 600 \times 3 + 700 \times 1}{108}$$

$$= 225 \text{ (元)},$$

故大约需要耗费 225 元.12 分

21. 已知抛物线 C 的顶点在原点, 焦点在坐标轴上, 点 $A(1, 2)$ 为抛物线 C 上一点.

(1) 求 C 的方程;

(2) 若点 $B(1, -2)$ 在 C 上, 过 B 作 C 的两弦 BP 与 BQ , 若 $k_{BP} \cdot k_{BQ} = -2$, 求证: 直线 PQ 过定点.

【解析】

(1) 当焦点在 x 轴时, 设 C 的方程为 $x^2 = 2py$, 代入点 $A(1, 2)$ 得 $2p = 4$, 即 $y^2 = 4x$.
.....2 分

当焦点在 y 轴时, 设 C 的方程为 $x^2 = 2py$, 代入点 $A(1, 2)$ 得 $2p = \frac{1}{2}$, 即 $x^2 = \frac{1}{2}y$,

综上可知: C 的方程为 $y^2 = 4x$ 或 $x^2 = \frac{1}{2}y$.
.....4 分

(2) 因为点 $B(1, -2)$ 在 C 上, 所以曲线 C 的方程为 $y^2 = 4x$.

设点 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$,

直线 $PQ: x = my + b$, 显然 m 存在, 联立方程有:

$$y^2 - 4my - 4b = 0, \Delta = 16(m^2 + b), \therefore y_1 + y_2 = 4m, y_1 \cdot y_2 = -4b. \text{7 分}$$

$$\because k_{BP} \cdot k_{BQ} = -2, \therefore \frac{y_1 + 2}{x_1 - 1} \cdot \frac{y_2 + 2}{x_2 - 1} = -2, \therefore \frac{4}{y_1 - 2} \cdot \frac{4}{y_2 - 2} = -2,$$

$$\text{即 } y_1 y_2 - 2(y_1 + y_2) + 12 = 0, \therefore -4b - 8m + 12 = 0 \text{ 即 } b = 3 - 2m. \text{10 分}$$

直线 $PQ: x = my + b = my + 3 - 2m$ 即 $x - 3 = m(y - 2), \therefore$ 直线 PQ 过定点 $(3, 2)$.

.....12 分

22. 已知函数 $f(x) = e^x - 1 - x - ax^2$.

(1) 当 $x \geq 0$ 时, 若不等式 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围;

(2) 若 $x > 0$, 证明 $(e^x - 1)\ln(x+1) > x^2$.

【解析】

(1) 由条件得 $f'(x) = e^x - 1 - 2ax$,

令 $h(x) = e^x - 1 - 2ax$, 则 $h'(x) = e^x - 2a$1 分

① 当 $2a \leq 1$ 时, 在 $[0, +\infty]$ 上, $h'(x) \geq 0$, $h(x)$ 单调递增

$\therefore h(x) \geq h(0)$, 即 $f'(x) \geq f'(0) = 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $[0, +\infty]$ 上为增函数, $\therefore f(x) \geq f(0) = 0$

$\therefore a \leq \frac{1}{2}$ 时满足条件.3 分

② 当 $2a > 1$ 时, 令 $h'(x) = 0$

解得 $x = \ln 2a$, 在 $[0, \ln 2a]$ 上, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减,

$\therefore$ 当 $x \in (0, \ln 2a)$ 时, 有 $h(x) < h(0) = 0$, 即 $f'(x) < f'(0) = 0$,

$f(x)$ 在 $(0, \ln 2a)$ 上为减函数, $\therefore f(x) < f(0) = 0$, 不合题意.

综上实数 a 的取值范围为 $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$6 分

(2) 由 (1) 得, 当 $a = \frac{1}{2}$, $x > 0$ 时, $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$,

即 $e^x - 1 > x + \frac{x^2}{2} = \frac{x^2 + 2x}{2}$,

要证不等式 $(e^x - 1)\ln(x+1) > x^2$, 只需证明 $e^x - 1 > \frac{x^2}{\ln(x+1)}$, 只需证明

$$\frac{x^2 + 2x}{2} > \frac{x^2}{\ln(x+1)}, \text{ 只需证 } \ln(x+1) > \frac{2x}{2+x}, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{设 } F(x) = \ln(x+1) - \frac{2x}{x+2} (x > 0), \text{ 则 } F'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{x^2}{(x+2)^2} = \frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2},$$

$\therefore$ 当 $x > 0$ 时, $F'(x) > 0$ 恒成立, 故 $F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

又 $F(0) = 0$, $\therefore F(x) > 0$ 恒成立. $\therefore$ 原不等式成立. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$