

0)的直线交 E 于 A, M 两点,点 N 在 E 上, $MA \perp NA$.

(1)当 $t=4$, $|AM|=|AN|$ 时,求 $\triangle AMN$ 的面积;

(2)当 $2|AM|=|AN|$ 时,求 k 的取值范围.

解:(1)略;(2)由题意知 $t>3$, $k>0$, $A(-\sqrt{t},0)$,将直线 AM 的方程 $y=k(x+\sqrt{t})$ 代入 $\frac{x^2}{t}+\frac{y^2}{3}=1$ 得 $(3+tk^2)x^2+2\sqrt{t}\cdot tk^2x+t^2k^2-3t=0$,设 $M(x_1,y_1)$,则 $x_1\cdot(-\sqrt{t})=\frac{t^2k^2-3t}{3+tk^2}$,即 $x_1=\frac{\sqrt{t}(3-tk^2)}{3+tk^2}$,故 $|AM|=\sqrt{k^2+1}\cdot|x_1+\sqrt{t}|=6\sqrt{k^2+1}$

$\cdot\frac{\sqrt{t}}{3+tk^2}$,由题设知,直线 AN 的方程为 $y=-\frac{1}{k}(x+\sqrt{t})$,故同理可得 $|AN|=6k\cdot\sqrt{k^2+1}\cdot\frac{\sqrt{t}}{3k^2+t}$.由

$2|AM|=|AN|$ 得 $\frac{2}{3+tk^2}=\frac{k}{3k^2+t}$,即 $(k^3-2)t=$

$3k(2k-1)$.当 $k^3-2=0$,即 $k=\sqrt[3]{2}$ 时上式不成立,因此 $t=\frac{3k(2k-1)}{k^3-2}$.由 $t>3$ 得 $\frac{3k(2k-1)}{k^3-2}>3$,所以

$\frac{k^3-2k^2+k-2}{k^3-2}=\frac{(k-2)(k^2+1)}{k^3-2}<0$,即 $\frac{k-2}{k^3-2}<0$.由

此得 $\begin{cases} k-2>0, \\ k^3-2<0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} k-2<0, \\ k^3-2>0 \end{cases}$,解得 $k\in(\sqrt[3]{2},2)$.因此所求 k 的取值范围是 $(\sqrt[3]{2},2)$.

5. 合理联想,运用平凡性质构建不等式解范围

有些圆锥曲线研究某直线与圆恒有交点求参数取值范围的问题,由于题设中有两个参数,用解析几何中有交点的理论将二方程联立,用判别式来解题是比较困难.若考虑到直线过定点,且曲线为圆,则可运用平凡性质,想到必须定点在圆上或圆内,从而构建不等式,求出参数取值范围.这类问题可培养学生直观想象、逻辑推理等核心素养.

例6 不论 k 为何实数,直线 $y=kx+1$ 与曲线 $C:x^2+y^2-2ax+a^2-2a-4=0$ 恒有交点,求 a 的范围.

解:直线 $y=kx+1$ 恒过 $(0,1)$ 的直线系方程,曲线 C 化为标准方程为 $(x-a)^2+y^2=4+2a$,从而其圆心为 $C(a,0)$,半径为 $\sqrt{4+2a}$.要使直线与曲线 $x^2+y^2-2ax+a^2-2a-4=0$ 恒有交点,则点 $A(0,1)$ 必须在圆上或圆内,则有点 $A(0,1)$ 到圆心距离不大于半径,则有 $a^2+1\leq 2a+4(a>-2)$,得 $-1\leq a\leq 3$.

6. 分类讨论,利用函数构建不等式解范围

关于二次函数的问题主要可以总结如下:

(1)若二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 大于0恒成立,则有 $a>0$ 且 $\Delta<0$;

(2)二次函数在指定区间上的恒成立问题可以利用韦达定理以及根的分布理论求解.

例7 若函数 $f(x)=\sqrt{(a^2-1)x^2+(a-1)x+\frac{2}{a+1}}$ 的定义域为 R ,求实数 a 的取值范围.

解:因为当 $x\in R$ 时有 $(a^2-1)x^2+(a-1)x+\frac{2}{a+1}\geq 0$ 恒成立.从而①当 $a^2-1=0$,即

$\begin{cases} a^2-1=0, \\ a+1\neq 0 \end{cases}$ 时,有 $a=1$,此时 $(a^2-1)x^2+(a-1)x+\frac{2}{a+1}=1\geq 0$, $\therefore a=1$;

②当 $a^2-1\neq 0$ 时,即

$\begin{cases} a^2-1>0, \\ \Delta=(a-1)^2-4(a^2-1)\frac{2}{a+1}\leq 0 \end{cases}$ 时,有 $\begin{cases} a^2>1, \\ a^2-10a+9\leq 0, \end{cases}$ 则

$1<a\leq 9$.综上所述,所求实数 a 的取值范围为 $[1,9]$.

本文主要是分析了几种需要通过构建不等式能解出参数范围的常见题型,着重研究它的题型特点、解题方法以及思路形成的规律,旨在教学实践中切实帮助学生提高分析解决问题的能力,培养一定的数学核心素养.

例析恒成立不等式求参的处理方法

江苏省海门中学 (226100) 徐巧石

在函数与导数的问题中,给定不等式恒成立,求参数的取值范围是常见的设问方式,函数形式的不同处理方式也不尽相同.本文通过不同的例题

与解法来给出处理此类问题的相关策略.

一、构造差函数直接求最值

例1 (2021届扬州市期考)已知函数 $f(x)=$

$e^x(x^2 + mx + m^2)$, $g(x) = ax^2 + x + ax \ln x$. (1) 若函数 $f(x)$ 在 $x = -1$ 处取极小值, 求实数 m 的值; (2) 设 $m = 0$, 若对任意 $x \in (0, +\infty)$, 不等式 $f(x) \geq g(x)$ 恒成立, 求实数 a 的值.

解: (1) 略; (2) 由 $f(x) \geq g(x)$ 得不等式 $xe^x \geq a(x + \ln x) + 1$ 恒成立, 令 $h(x) = xe^x - 1 - a(x + \ln x)$ ($x > 0$), 求得 $h'(x) = (x+1)(e^x - \frac{a}{x})$, 当 $a \leq 0$ 时, $h'(x) > 0$, 所以 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 因为 $h(\frac{1}{e}) = \frac{1}{e}e^{\frac{1}{e}} - 1 + a(1 - \frac{1}{e}) < \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}} - 1 + a(1 - \frac{1}{e}) < 0$, 所以不符合题意; 当 $a > 0$ 时, 令 $p(x) = xe^x - a(x \geq 0)$, 则 $p(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上递增, 又 $p(0) = -a < 0$, $p(a) = ae^a - a > 0$, 且 $p(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 所以存在唯一 $x_0 \in (0, a)$, 使得 $p(x_0) = x_0e^{x_0} - a = 0$, 当 $x \in (0, x_0)$ 时, $h'(x) < 0$, 故 $h(x)$ 递减; 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时 $h'(x) > 0$, 故 $h(x)$ 递增. 所以 $h(x)_{\min} = h(x_0) = x_0e^{x_0} - 1 - a(x_0 + \ln x_0) = a - a \ln a - 1$, 所以 $a - a \ln a - 1 \geq 0$, 即 $\ln a + \frac{1}{a} - 1 \leq 0$, 令 $\varphi(a) = \ln a + \frac{1}{a} - 1$, 则 $\varphi'(a) = \frac{a-1}{a^2}$, 所以 $\varphi(a)$ 在 $(0, 1)$ 上递减, 在 $(1, +\infty)$ 上递增, 又 $\varphi(1) = 0$, 所以 $a = 1$.

评注: 构造差函数直接求最值, 因为函数中含有参数, 需要对参数进行分类讨论, 所以此种方法的第一个难点是确定分类的标准, 因为是恒成立问题, 可以通过取特殊值来缩小讨论的范围简化解题过程. 第2个难点是导函数的零点存在但是求不出来, 此时需要常常需要利用隐零点整体代换解决.

二、参变量分离后求最值

例2 (2021届山东菏泽月考) 已知函数 $f(x) = \ln x - kx$ ($k \in \mathbf{R}$), $g(x) = x(e^x - 2)$. (1) 若 $f(x)$ 有唯一零点, 求 k 的取值范围; (2) 若 $g(x) - f(x) \geq 1$ 恒成立, 求 k 的取值范围.

解: (1) 略; (2) 法一: 因为 $x(e^x - 2) - (\ln x - kx) \geq 1$ 恒成立, 且 $x > 0$, 所以 $k \geq \frac{1 + \ln x}{x} - e^x + 2$. 令 $\mu(x) = \frac{1 + \ln x}{x} - e^x + 2$, 则 $\mu'(x) = \frac{-\ln x - x^2 e^x}{x^2}$, 令 $\mu(x) = -\ln x - x^2 e^x$, 则 $\mu'(x) = -\frac{1}{x} - (x^2 + 2x)e^x < 0$, 所以 $\mu(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 又 $\mu(\frac{1}{e}) = 1 - e^{\frac{1}{e}-2} > 0$, $\mu(1) = -e < 0$, 所以存在唯一的 $x_0 \in$

$(\frac{1}{e}, 1)$, 使得 $\mu(x_0) = 0$, 且当 $x \in (0, x_0)$ 时, $\mu(x) > 0$, 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $\mu(x) < 0$, 所以 $\varphi(x)$ 在 $(0, x_0)$ 单调递增, $(x_0, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $\varphi(x) \leq \varphi(x_0) = \frac{1 + \ln x_0}{x_0} - e^{x_0} + 2$, 又因 $-\ln x_0 = x_0^2 e^{x_0}$, 两边同时取对数得 $\ln(-\ln x_0) = 2 \ln x_0 + x_0$, 所以 $\ln(-\ln x_0) - \ln x_0 = \ln x_0 + x_0$. 因为函数 $h(x) = \ln x + x$ 单调递增, 所以 $-\ln x_0 = x_0$, 即 $\frac{1}{x_0} = e^{x_0}$, 所以 $\varphi(x_0) = \frac{1 - x_0}{x_0} - e^{x_0} + 2 = \frac{1}{x_0} - 1 - e^{x_0} + 2 = 1$, 所以 $\varphi(x)_{\max} = \varphi(x_0) = 1$, 所以 $k \geq 1$.

评注: 分离参数后转化为求确定函数的最值, 对于确定的函数求最值, 同样会遇到极值点不可求的情况, 需要利用隐零点代换进行处理. 此题中在隐零点代换的过程中直接代换得不到最大值, 需要对方程进行化简, 通过取对数, 转化为相同的结构, 利用函数的单调性化简.

法二: 令 $p(x) = e^x - x - 1$, $x \in \mathbf{R}$, 则 $p'(x) = e^x - 1 = 0$, 得 $x = 0$, 则 $p(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $p(x) \geq p(0) = 0$, 所以 $e^x \geq x + 1$, 当且仅当 $x = 0$ 时取等号. 令 $\varphi(x) = \frac{1 + \ln x}{x} - e^x + 2 = \frac{1 + \ln x - e^x + \ln x + 2x}{x} \leq \frac{1 + \ln x - x - \ln x - 1 + 2x}{x} = 1$, 当且仅当 $x + \ln x = 0$ 时取等号, 令 $h(x) = x + \ln x$, 则 $h'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$, $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 又因为 $h(1) = 1 > 0$, $h(\frac{1}{e}) = -1 + \frac{1}{e} < 0$, 所以存在 x_0 使得 $x_0 + \ln x_0 = 0$, 所以 $\varphi(x)$ 的最大值为 1, 所以 $k \geq 1$.

评注: 此法在分参后没有直接求最值, 而是通过同构利用常见的不等式放缩求到最值. $e^x \geq x + 1$ 、 $e^x \geq ex$ 、 $\ln x \leq x - 1$ 等是常见处理以自然对数为底数的不等式.

例3 (2021届南通市海门区一模) 已知函数 $f(x) = e^{x-1} + ax$, $g(x) = bx - b \ln x$, 其中 e 为自然对数的底数, $a, b \in \mathbf{R}$. (1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性; (2) 当 $a = 0$ 时, 若 $f(x) \geq xg(x)$ 对 $x > 0$ 恒成立, 求实数 b 的取值范围.

解: (1) 略; (2) 问题等价于 $e^{x-1} - b(x - \ln x) \geq 0$ 对 $x > 0$ 恒成立, 令 $h(x) = x - \ln x$, 则 $h'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} = 0$, 得 $x = 1$, 即当 $x > 1$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 当 $0 < x < 1$ 时, $h'(x)$

<0 , $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减, 所以 $h(x) \geq h(1) = 1$. 令 $t = x - \ln x$, 则 $t \geq 1$, 则原问题等价于 $e^{t-1} - bt \geq 0$, 对 $t \geq 1$ 恒成立, 等价于 $b \leq \frac{e^{t-1}}{t}$, 对 $t \geq 1$ 恒成立, 令 $p(t) = \frac{e^{t-1}}{t}$, $t \geq 1$, 则 $p'(t) = \frac{e^{t-1}(t-1)}{t^2} \geq 0$, 所以 $p(t)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $p(t)_{\min} = 1$, 所以 $b \leq 1$. 从而 b 的取值范围为 $(-\infty, 1]$.

评注: 本题中先通过同构, 换元后将不等式化简后, 在进行参变量分离求最值.

例 4 (2020 年新高考山东卷) 已知函数 $f(x) = ae^{x-1} - \ln x + \ln a$. (1) 当 $a = e$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积; (2) 若 $f(x) \geq 1$, 求 a 的取值范围.

解: (1) 略; (2) $f(x) = ae^{x-1} - \ln x + \ln a = e^{\ln a + x - 1} - \ln x + \ln a \geq 1$ 等价于 $e^{\ln a + x - 1} + \ln a + x - 1 \geq \ln x + x = e^{\ln x} + \ln x$, 令 $g(x) = e^x + x$, 上述不等式等价于 $g(\ln a + x - 1) \geq g(\ln x)$, 因为 $g(x)$ 为单调增函数, 所以等价于 $\ln a + x - 1 \geq \ln x$, 即 $\ln a \geq \ln x - x + 1$, 令 $h(x) = \ln x - x + 1$, 则 $h'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$, 从而在 $(0,1)$ 上 $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增; 在 $(1, +\infty)$ 上 $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减, 所以 $h(x)_{\max} = h(1) = 0$, 所以 $\ln a \geq 0$, 即 $a \geq 1$, 所以 a 的取值范围是 $[1, +\infty)$.

评注: 本题中通过变换转化为相同的函数的两个函数值之间的大小, 利用单调性转化为两个自变量之间的大小关系, 然后再采用分离参变量求最值. 上述 3 种解法在分离参变量的过程中, 在之前或之后通过变换同构等化简不等式后再求确定函数的最值.

三、化为区间端点恰成立问题

例 5 (2021 届江苏高三四校联考) 已知函数 $f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$, $g(x) = a(e^x - 1)$ (a 为常数). (1) 求函数 $f(x)$ 在 $x = \frac{\pi}{2}$ 处的切线方程; (2) 设 $F(x) = f(x) + (-1)^n g(x)$ ($n \in \mathbf{Z}$). (i) 若 n 为偶数, 当 $a < 0$ 时, 函数 $F(x)$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上有极值点, 求实数 a 的取值范围; (ii) 若 n 为奇数, 不等式 $F(x) \leq 0$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒成立, 求实数 a 的最小值.

解: (1) 略; (2) (i) 略; (ii) 当 n 为奇数时, $F(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x} - a(e^x - 1)$, $F(0) = 0$, 当 $x > 0$ 时, $F'(x) = \frac{2\cos x + 1}{(2 + \cos x)^2} - ae^x$, 令 $t = 2 + \cos x \in [1, 3]$, $m(t) = \frac{2}{t} - \frac{3}{t^2}$ 万方数据 $\frac{1}{3}$, 当 $x > 0$ 时, $e^x > 1$, 当 $a \geq \frac{1}{3}$

时, $-ae^x < -\frac{1}{3}$, 所以 $F'(x) \leq 0$, 即 $F(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $F(x) \leq F(0) = 0$ 成立; 当 $a \leq 0$ 时, 当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $F'(x) > 0$, 即 $F(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增, 所以 $F(x) > F(0) = 0$ 与 $F(x) \leq 0$ 恒成立矛盾; 当 $0 < a < \frac{1}{3}$ 时, $F'(0) = \frac{1}{3} - a > 0$, $F'(\pi) = -1 - ae^\pi < 0$, 所以 $F'(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上存在零点, 设 x_1 是 $(0, \pi)$ 最小的零点, 则当 $x \in (0, x_1)$ 时, $F'(x) > 0$, 所以 $F(x)$ 在 $(0, x_1)$ 上单调递增, 所以当 $x \in (0, x_1)$ 时, $F(x) > F(0) = 0$ 与 $F(x) \leq 0$ 恒成立矛盾. 综上, a 的最小值为 $\frac{1}{3}$.

评注: 不等式在区间的端点恰好成立时, 比如 $f(x) \geq 0$, $x \in [a, +\infty)$ 恒成立, 在 $x = a$ 时正好成立, 此时可以得到不等式恒成立的一个充分条件, 即保证函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调递增, 但是需要说明参数取其它的值时不成立, 需要通过放缩, 或找到区间 (a, x_0) , 使得函数单调递减找到小于零的函数值. 此类问题不能采用分离参数处理的一个关键是参数分离后的函数单调但是在端点处没有意义, 需要用到大学中的洛必达法则处理, 超出了高中数学的范围. 是否采用此法的关键是预判分离参数后的函数是否在端点处取的最值.

四、化为区间某点恰成立问题

例 6 (2021 届唐山一模) 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$. (1) 证明: $f(x)$ 在定义域内为减函数; (2) 当 $a > 0$ 时, $f(x) \geq \frac{2a}{x+a}$, 求 a 的取值范围.

解: (1) 略; (2) $f(x) - \frac{2a}{x+a} = \frac{\ln x}{x-1} - \frac{2a}{x+a} = \frac{1}{x-1} [\ln x - \frac{2a(x-1)}{x+a}]$, 令 $h(x) = \ln x - \frac{2a(x-1)}{x+a}$, 则 $h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2a(a+1)}{(x+a)^2} = \frac{(x-a^2)^2 + a^2 - a^4}{x(x+a)^2}$. 当 $a^2 - a^4 \geq 0$, 即 $0 < a \leq 1$ 时, $x^2 - 2a^2x + a^2 \geq 0$, 所以 $h'(x) \geq 0$, 于是 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 又 $h(1) = 0$, 所以 $0 < x < 1$ 时, $h(x) < 0$, 从而 $f(x) - \frac{2a}{x+a} = \frac{1}{x-1} h(x) > 0$; 当 $x > 1$ 时, $h(x) > 0$, 从而 $f(x) - \frac{2a}{x+a} = \frac{1}{x-1} h(x) > 0$, 因此, 当 $0 < a \leq 1$ 时, $f(x) \geq \frac{2a}{x+a}$. 当 $a^2 - a^4 < 0$, 即 $a > 1$ 时, 若 $1 < x < a^2$, $x^2 - 2a^2x + a^2 < 0$, 所以 $h'(x) < 0$, 于是 $h(x)$ 在 $(1,$

a^2)上单调递减,又 $h(1)=0$,所以 $1 < x < a^2$ 时, $h(x) < 0$,从而 $f(x) - \frac{2a}{x+a} = \frac{1}{x-1}h(x) < 0$,与 $f(x) \geq \frac{2a}{x+a}$ 矛盾,因此, $a > 1$ 不满足题设. 综上, a 的取值范围是 $(0, 1]$.

评注:对于所给区间是开区间上的恒成立问题,端点的函数值不存在或无意义,此时可以通过

观察找到使得不等式成立的特殊值,从而确定讨论的标准.

在高三复习的最后阶段,总结梳理典型高考试题,对问题的类型与方法进行分类整理配以适当的练习巩固,是把握高考命题动向的有效方法. 通过梳理同一类型问题的不同处理方法,可以帮助学生把握解题的方向,调整解题思路,确定解题方法.

挖掘函数中隐含的性质巧解题

浙江省宁波市奉化区溪口中学 (315501) 金杰

在一些函数问题中,虽然给出了函数表达式,但由于表达式比较复杂,不能直接通过函数式的代入解决问题,而需要对函数式进行代数变形,挖掘出函数的性质,再运用函数性质来解题,本文举例介绍几个常见模式,供读者朋友参考.

一、挖掘函数的单调性

例1 已知 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3, & x \leq 0, \\ -x^2 - 2x + 3, & x > 0, \end{cases}$ 不等式

$f(x+a) > f(2a-x)$ 在 $[a, a+1]$ 上恒成立,求实数 a 的取值范围.

解析:先探究函数 $f(x)$ 的性质,通过此分段函数的图像可知,函数在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减,所以不等式 $f(x+a) > f(2a-x)$ 在 $[a, a+1]$ 上恒成立,即 $x+a < 2a-x$,也就是 $x < \frac{a}{2}$ 在 $[a, a+1]$ 上恒成立,所以有 $a+1 < \frac{a}{2}$,解得 $a < -2$,故实数 a 的取值范围是 $(-\infty, -2)$.

点评:本题是一个解函数不等式问题,由于给出的函数表达式比较复杂,所以通过直接表示出 $f(x+a)$ 和 $f(2a-x)$ 后解不等式是不可能实现的,找到函数的单调性才是解决问题的关键.

例2 已知函数 $f(x) = x(1+a|x|)$,设关于 x 的不等式 $f(x+a) < f(x)$ 的解集为 A ,若 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \subseteq A$,求实数 a 的取值范围.

解析:由题意可得 $f(x+a) < f(x)$ 在区间 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 上恒成立.

(i)当 $a > 0$ 时,函数 $f(x)$ 的图象如图1所示,从而, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增,故由 $a > 0 \Rightarrow$

$x+a > x \Rightarrow f(x+a) > f(x)$,故不符合题意.

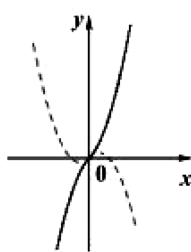


图1

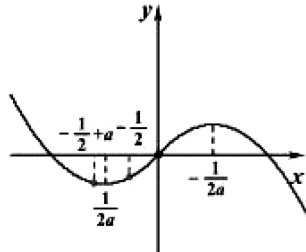


图2

(ii)当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 的图如图2所示,要使 $f(x$

$$+ a) < f(x), \text{ 则有 } \begin{cases} \frac{1}{2a} < -\frac{1}{2}, \\ f(-\frac{1}{2} + a) < f(-\frac{1}{2}) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a > -1, \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2a} > \frac{1}{2a} - (-\frac{1}{2} + a) \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2} < a < 0.$$

点评:本题通过对参数 a 进行分段讨论,化解了问题的难点,同时也显示此时有针对性的画图更能清晰地反映函数的性质,找到问题的实质.

二、挖掘函数的奇偶性

例3 设函数 $f(x) = \ln(1+|x|) - \frac{1}{1+x^2}$,求解不等式 $f(x) > f(2x-1)$.

解析:由 $f(x) = \ln(1+|x|) - \frac{1}{1+x^2}$,容易得到 $f(-x) = f(x)$,所以函数 $f(x)$ 为偶函数,所以 $f(x) = f(|x|)$,又当 $x > 0$ 时, $f(x) = \ln(1+x) - \frac{1}{1+x^2}$,因为 $y = \ln(1+x)$ 与 $y = -\frac{1}{1+x^2}$ 在 $(0, +\infty)$ 上都单