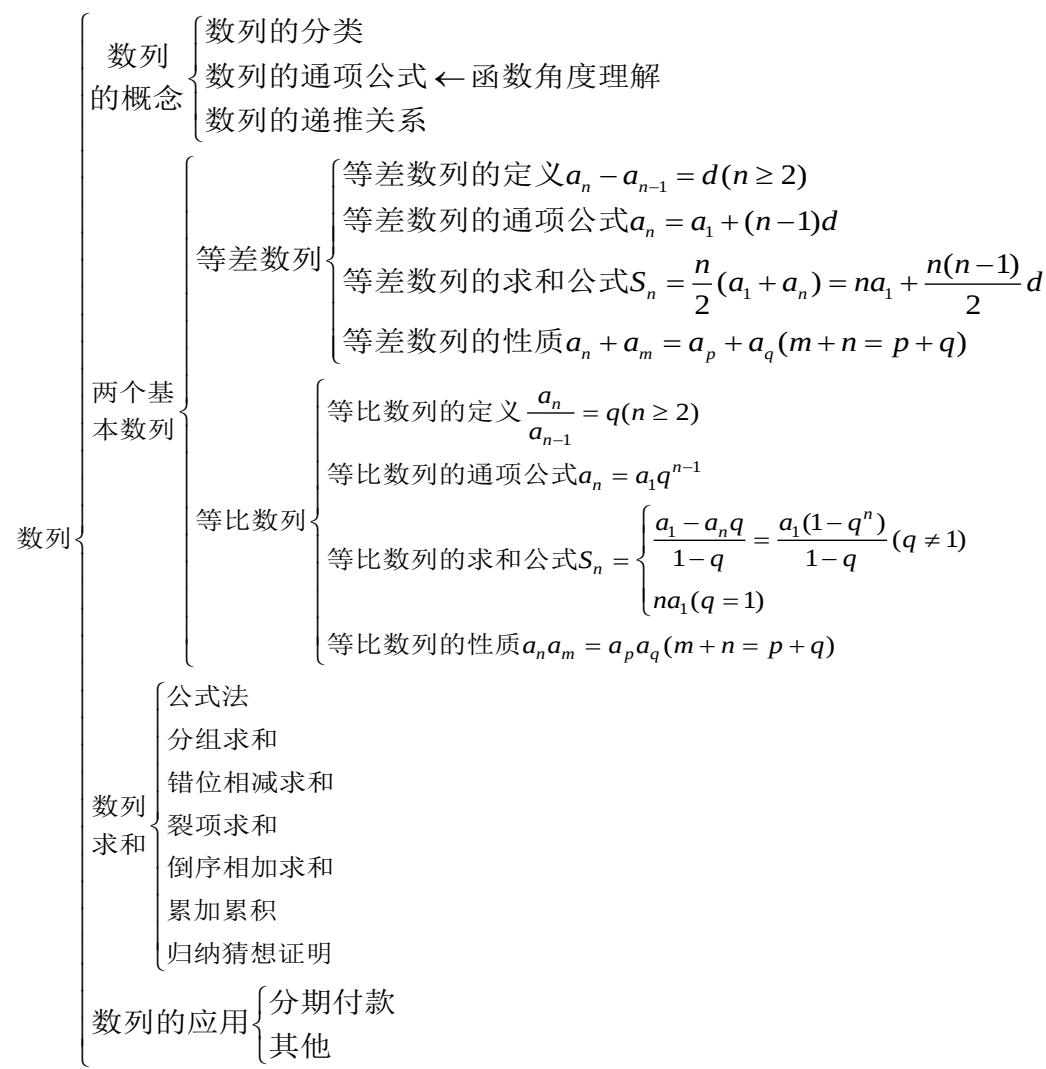


知识框架



掌握了数列的基本知识，特别是等差、等比数列的定义、通项公式、求和公式及性质，掌握了典型题型的解法和数学思想法的应用，就有可能在高考中顺利地解决数列问题。

一、典型题的技巧解法

1、求通项公式

(1) 观察法。(2) 由递推公式求通项。

对于由递推公式所确定的数列的求解，通常可通过对递推公式的变换转化成等差数列或等比数列问题。

(1)递推式为 $a_{n+1}=a_n+d$ 及 $a_{n+1}=qa_n$ (d, q 为常数)

例 1、 已知 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=a_n+2$ ，而且 $a_1=1$ 。求 a_n 。

例 1、解 ∵ $a_{n+1}-a_n=2$ 为常数 ∴ $\{a_n\}$ 是首项为 1，公差为 2 的等差数列
∴ $a_n=1+2(n-1)$ 即 $a_n=2n-1$

例 2、已知 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$ ，而 $a_1 = 2$ ，求 $a_n = ?$

解 ∵ $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$ 是常数

∴ $\{a_n\}$ 是以 2 为首项，公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列

∴ $a_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^{n-2}}$

(2) 递推式为 $a_{n+1}=a_n+f(n)$

例 3、已知 $\{a_n\}$ 中 $a_1 = \frac{1}{2}$ ， $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{4n^2 - 1}$ ，求 a_n 。

解： 由已知可知 $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$

令 $n=1, 2, \dots, (n-1)$ ，代入得 $(n-1)$ 个等式累加，即 $(a_2-a_1) + (a_3-a_2) + \dots + (a_n-a_{n-1})$

$= \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-1}\right) \right]$

∴ $a_n - a_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n-1}\right)$ $a_n = a_1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n-1}\right) = \frac{4n-3}{4n-2}$

★ 说明 只要和 $f(1) + f(2) + \dots + f(n-1)$ 是可求的，就可以由 $a_{n+1}=a_n+f(n)$ 以 $n=1, 2, \dots, (n-1)$ 代入，可得 $n-1$ 个等式累加而求 a_n 。

(3)递推式为 $a_{n+1}=pa_n+q$ (p, q 为常数)

例 4、 $\{a_n\}$ 中， $a_1=1$ ，对于 $n>1$ ($n \in \mathbb{N}$) 有 $a_n = 3a_{n-1} + 2$ ，求 a_n 。

解法一： 由已知递推式得 $a_{n+1}=3a_n+2$ ， $a_n=3a_{n-1}+2$ 。两式相减： $a_{n+1}-a_n=3(a_n-a_{n-1})$

因此数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 是公比为 3 的等比数列，其首项为 $a_2-a_1=(3 \times 1+2)-1=4$

∴ $a_{n+1}-a_n=4 \cdot 3^{n-1}$ ∵ $a_{n+1}=3a_n+2$ ∴ $3a_n+2-a_n=4 \cdot 3^{n-1}$ 即 $a_n=2 \cdot 3^{n-1}-1$

解法二： 上法得 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 是公比为 3 的等比数列，于是有： $a_2-a_1=4$ ， $a_3-a_2=4 \cdot 3$ ， $a_4-a_3=4 \cdot 3^2$ ， $\dots$ ， $a_n-a_{n-1}=4 \cdot 3^{n-2}$ ，

把 $n-1$ 个等式累加得： $a_n - a_1 = 4(1+3+3^2+\dots+3^{n-2}) = \frac{4(1-3^{n-1})}{1-3}$ ∴ $a_n=2 \cdot 3^{n-1}-1$

(4)递推式为 $a_{n+1}=p a_n+q n$ (p, q 为常数)

【例5】 已知 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = \frac{5}{6}$ ， $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ ，求 a_n 。

略解 在 $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ 的两边乘以 2^{n+1} 得

$2^{n+1} \cdot a_{n+1} = \frac{2}{3} (2^n a_n) + 1$ ，令 $b_n = 2^n a_n$

则 $b_{n+1} = \frac{2}{3} b_n + 1$ ，于是可得

$b_{n+1} - b_n = \frac{2}{3}(b_n - b_{n-1})$ 由上题的解法，得： $b_n = 3 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ∴ $a_n = \frac{b_n}{2^n} = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$

★说明 对于递推式 $a_{n+1} = pa_n + q^n$ ，可两边除以 q^{n+1} ，得 $\frac{a_{n+1}}{q^{n+1}} =$

$\frac{p}{q} \cdot \frac{a_n}{q^n} + \frac{1}{q}$ ，引辅助数列 $\{b_n\}$ ， $(b_n = \frac{a_n}{q^n})$ ，得 $b_{n+1} = \frac{p}{q} b_n + \frac{1}{q}$ 后用

(5)递推式为 $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$

思路：设 $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$ ，可以变形为： $a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$ ，

就是 $a_{n+2} = (\alpha + \beta) a_{n+1} - \alpha \beta a_n$ ，则可从 $\begin{cases} \alpha + \beta = p \\ \alpha \cdot \beta = -q \end{cases}$ 解得 α, β ，

于是 $\{a_{n+1} - \alpha a_n\}$ 是公比为 β 的等比数列，就转化为前面的类型。

【例6】 已知数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 1$ ， $a_2 = 2$ ， $a_{n+2} = \frac{2}{3}a_{n+1} + \frac{1}{3}a_n$ ， 求 a_n 。

$$\text{分析 } \begin{cases} \alpha + \beta = p \\ \alpha \cdot \beta = -q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{2}{3} \\ \alpha \cdot \beta = \frac{1}{3} \end{cases}$$

解 在 $a_{n+2} = \frac{2}{3}a_{n+1} + \frac{1}{3}a_n$ 两边减去 a_{n+1} ，得

$$(a_{n+2} - a_{n+1}) = -\frac{1}{3}(a_{n+1} - a_n)$$

$\therefore \{a_{n+1} - a_n\}$ 是公比为 $-\frac{1}{3}$ ，首项为 $a_2 - a_1 = 1$ 的等比数列。

$$a_n - a_1 = \left(-\frac{1}{3}\right)^0 + \left(-\frac{1}{3}\right)^1 + \cdots + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2}$$

$$\therefore a_n = 1 + \frac{3}{4}[1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}]$$

(6) 递推式为 S_n 与 a_n 的关系式

此类型可利用 $a_n = \begin{cases} a_1 & (n=1) \\ S_n - S_{n-1} & (n \geq 2) \end{cases}$

【例7】 设 $\{a_n\}$ 前 n 项的和 $S_n = 4 - a_n - \frac{1}{2^{n-2}}$ 。(1) 求 a_{n+1} 与 a_n 的关系；(2) 试用 n 表示 a_n 。

解 (1) 由 $S_n = 4 - a_n - \frac{1}{2^{n-2}}$ 得

$$S_{n+1} = 4 - a_{n+1} - \frac{1}{2^{n-1}} \quad \therefore S_{n+1} - S_n = (a_n - a_{n+1}) + \left(\frac{1}{2^{n-2}} - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$\therefore a_{n+1} = a_n - a_{n+1} + \frac{1}{2^{n-1}} \quad \therefore a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2^n}$$

上式两边同乘以 2^{n+1} 得 $2^{n+1}a_{n+1} = 2^n a_n + 2$ 则 $\{2^n a_n\}$ 是公差为 2 的等差数列。

$$\therefore 2^n a_n = 2 + (n-1) \cdot 2 = 2n \quad \therefore a_n = \frac{n}{2^{n-1}}$$

数列求和的常用方法：

1、拆项分组法：即把每一项拆成几项，重新组合分成几组，转化为特殊数列求和。

2、错项相减法：适用于差比数列（如果 $\{a_n\}$ 等差， $\{b_n\}$ 等比，那么 $\{a_n b_n\}$ 叫做差比数列）

即把每一项都乘以 $\{b_n\}$ 的公比 q ，向后错一项，再对应同次项相减，转化为等比数列求和。

3、裂项相消法：即把每一项都拆成正负两项，使其正负抵消，只余有限几项，可求和。

适用于数列 $\left\{\frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}}\right\}$ 和 $\left\{\frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}}\right\}$ （其中 $\{a_n\}$ 等差）

$$\text{可裂项为：} \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}} = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right), \quad \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}} = \frac{1}{d} (\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n})$$

等差数列前 n 项和的最值问题：

1、若等差数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 > 0$ ，公差 $d < 0$ ，则前 n 项和 S_n 有最大值。

(i) 若已知通项 a_n ，则 S_n 最大 $\Leftrightarrow \begin{cases} a_n \geq 0 \\ a_{n+1} \leq 0 \end{cases}$ ；

(ii) 若已知 $S_n = pn^2 + qn$ ，则当 n 取最靠近 $-\frac{q}{2p}$ 的非零自然数时 S_n 最大；

2、若等差数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 < 0$ ，公差 $d > 0$ ，则前 n 项和 S_n 有最小值

(i) 若已知通项 a_n ，则 S_n 最小 $\Leftrightarrow \begin{cases} a_n \leq 0 \\ a_{n+1} \geq 0 \end{cases}$ ；

(ii) 若已知 $S_n = pn^2 + qn$ ，则当 n 取最靠近 $-\frac{q}{2p}$ 的非零自然数时 S_n 最小；

数列通项的求法：

(1) 公式法：①等差数列通项公式；②等比数列通项公式。

(2) 已知 S_n （即 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = f(n)$ ）求 a_n ，用作差法： $a_n = \begin{cases} S_1, (n=1) \\ S_n - S_{n-1}, (n \geq 2) \end{cases}$ 。

已知 $a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n = f(n)$ 求 a_n ，用作商法： $a_n = \begin{cases} f(1), (n=1) \\ \frac{f(n)}{f(n-1)}, (n \geq 2) \end{cases}$ 。

(3) 已知条件中既有 S_n 还有 a_n ，有时先求 S_n ，再求 a_n ；有时也可直接求 a_n 。

(4) 若 $a_{n+1} - a_n = f(n)$ 求 a_n 用累加法： $a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_2 - a_1) + a_1$ ($n \geq 2$)。

(5) 已知 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = f(n)$ 求 a_n ，用累乘法： $a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \cdots \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1$ ($n \geq 2$)。

(6)已知递推关系求 a_n ，用构造法（构造等差、等比数列）。

特别地，（1）形如 $a_n = ka_{n-1} + b$ 、 $a_n = ka_{n-1} + b^n$ （ k, b 为常数）的递推数列都可以用待定系数法转化为公比为 k 的等比数列后，再求 a_n ；形如 $a_n = ka_{n-1} + k^n$ 的递推数列都可以除以 k^n 得到一个等差数列后，再求 a_n 。

（2）形如 $a_n = \frac{a_{n-1}}{ka_{n-1} + b}$ 的递推数列都可以用倒数法求通项。

（3）形如 $a_{n+1} = a_n^k$ 的递推数列都可以用对数法求通项。

（7）（理科）数学归纳法。

（8）当遇到 $a_{n+1} - a_{n-1} = d$ 或 $\frac{a_{n+1}}{a_{n-1}} = q$ 时，分奇数项偶数项讨论，结果可能是分段形式。

数列求和的常用方法：

- （1）公式法：①等差数列求和公式；②等比数列求和公式。
- （2）分组求和法：在直接运用公式法求和有困难时，常将“和式”中“同类项”先合并在一起，再运用公式法求和。
- （3）倒序相加法：若和式中到首尾距离相等的两项和有其共性或数列的通项与组合数相关联，则常可考虑选用倒序相加法，发挥其共性的作用求和（这也是等差数列前 n 和公式的推导方法）。
- （4）错位相减法：如果数列的通项是由一个等差数列的通项与一个等比数列的通项相乘构成，那么常选用错位相减法（这也是等比数列前 n 和公式的推导方法）。
- （5）裂项相消法：如果数列的通项可“分裂成两项差”的形式，且相邻项分裂后相关联，那么常选用裂项相消法求和。常用裂项形式有：

① $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ ； ② $\frac{1}{n(n+k)} = \frac{1}{k}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k})$ ；
③ $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{2}(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1})$ ， $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{(k+1)k} < \frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ ；
④ $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}]$ ； ⑤ $\frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$ ；
⑥ $2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$

二、解题方法：

求数列通项公式的常用方法：

- 1、公式法
- 2、由 S_n 求 a_n

$(n=1$ 时， $a_1 = S_1$ ， $n \geq 2$ 时， $a_n = S_n - S_{n-1})$

3、求差（商）法

如： $\{a_n\}$ 满足 $\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2^2}a_2 + \cdots + \frac{1}{2^n}a_n = 2n+5$ <1>

解： $n=1$ 时， $\frac{1}{2}a_1 = 2 \times 1 + 5$ ， $\therefore a_1 = 14$

$n \geq 2$ 时， $\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2^2}a_2 + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}a_{n-1} = 2n-1+5$ <2>

<1> - <2> 得： $\frac{1}{2^n}a_n = 2$

$\therefore a_n = 2^{n+1}$

$\therefore a_n = \begin{cases} 14 & (n=1) \\ 2^{n+1} & (n \geq 2) \end{cases}$

[练习]

数列 $\{a_n\}$ 满足 $S_n + S_{n+1} = \frac{5}{3}a_{n+1}$ ， $a_1 = 4$ ，求 a_n

（注意到 $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ 代入得： $\frac{S_{n+1}}{S_n} = 4$

又 $S_1 = 4$ ， $\therefore \{S_n\}$ 是等比数列， $S_n = 4^n$

$n \geq 2$ 时， $a_n = S_n - S_{n-1} = \cdots = 3 \cdot 4^{n-1}$

4、叠乘法

例如：数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 3$ ， $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1}$ ，求 a_n

解： $\frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{n-1}{n}$ ， $\therefore \frac{a_n}{a_1} = \frac{1}{n}$

又 $a_1 = 3$ ， $\therefore a_n = \frac{3}{n}$

5、等差型递推公式

由 $a_n - a_{n-1} = f(n)$ ， $a_1 = a_0$ ，求 a_n ，用迭加法

$\left. \begin{matrix} n \geq 2 \text{ 时，} a_2 - a_1 = f(2) \\ a_3 - a_2 = f(3) \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_n - a_{n-1} = f(n) \end{matrix} \right\} \text{两边相加，得：}$

$a_n - a_1 = f(2) + f(3) + \cdots + f(n)$

$\therefore a_n = a_0 + f(2) + f(3) + \cdots + f(n)$

[练习]

数列 $\{a_n\}$ ， $a_1 = 1$ ， $a_n = 3^{n-1} + a_{n-1}$ （ $n \geq 2$ ），求 a_n

$(a_n = \frac{1}{2}(3^n - 1))$

6、等比型递推公式

$$a_n = ca_{n-1} + d \text{ (} c、d \text{ 为常数, } c \neq 0, c \neq 1, d \neq 0 \text{)}$$

可转化为等比数列，设 $a_n + x = c(a_{n-1} + x)$

$$\Rightarrow a_n = ca_{n-1} + (c-1)x$$

令 $(c-1)x = d, \therefore x = \frac{d}{c-1}$

$\therefore \left\{a_n + \frac{d}{c-1}\right\}$ 是首项为 $a_1 + \frac{d}{c-1}$ ，c 为公比的等比数列

$$\therefore a_n + \frac{d}{c-1} = \left(a_1 + \frac{d}{c-1}\right) \cdot c^{n-1}$$

$$\therefore a_n = \left(a_1 + \frac{d}{c-1}\right)c^{n-1} - \frac{d}{c-1}$$

[练习]

数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 9, 3a_{n+1} + a_n = 4$ ，求 a_n

$$(a_n = 8\left(-\frac{4}{3}\right)^{n-1} + 1)$$

7、倒数法

例如： $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{2a_n}{a_n + 2}$ ，求 a_n

由已知得： $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{a_n + 2}{2a_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{a_n}$

$$\therefore \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{2}$$

$\therefore \left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 为等差数列， $\frac{1}{a_1} = 1$ ，公差为 $\frac{1}{2}$

$$\therefore \frac{1}{a_n} = 1 + (n-1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(n+1)$$

$$\therefore a_n = \frac{2}{n+1}$$

2. 数列求和问题的方法

(1)、应用公式法

等差、等比数列可直接利用等差、等比数列的前 n 项和公式求和，另外记住以下公式对求和来说是有益的。

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2;$$

【例 8】 求数列 1，(3+5)，(7+9+10)，(13+15+17+19)，…前 n 项的和。

解 本题实际是求各奇数的和，在数列的前 n 项中，共有 $1+2+\cdots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$ 个奇数，

$\therefore$ 最后一个奇数为： $1 + \left[\frac{1}{2}n(n+1)-1\right] \times 2 = n^2 + n - 1$

因此所求数列的前 n 项的和为

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2}n(n+1) \cdot \frac{[1+(n^2+n-1)]}{2} \\ &= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2. \end{aligned}$$

(2)、分解转化法

对通项进行分解、组合，转化为等差数列或等比数列求和。

【例 9】 求和 $S = 1 \cdot (n^2-1) + 2 \cdot (n^2-2^2) + 3 \cdot (n^2-3^2) + \cdots + n(n^2-n^2)$

解 $S = n^2(1+2+3+\cdots+n) - (1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3)$

$$= n^2 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) - \frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

$$= \frac{1}{4}n^2(n+1)(n-1)$$

$$= \frac{1}{4}n^2(n^2-1)$$

(3)、倒序相加法

适用于给定式子中与首末两项之和具有典型的规律的数列，采取把正着写与倒着写的两个和式相加，然后求和。

例 10、求和： $S_n = 3C_n^1 + 6C_n^2 + \cdots + 3nC_n^n$

例 10、解
$$\begin{aligned} S_n &= 0 \bullet C_n^0 + 3C_n^1 + 6C_n^2 + \cdots + 3nC_n^n \\ \text{又 } S_n &= 3nC_n^n + 3(n-1)C_n^{n-1} + \cdots + 0C_n^0 \\ \text{相加，且运用 } C_n^k &= C_n^{n-k} \text{ 可得} \\ 2S_n &= 3n(C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n) = 3n \cdot 2^n \end{aligned}$$

$$\therefore S_n = 3n \cdot 2^{n-1}$$

(4)、错位相减法

如果一个数列是由一个等差数列与一个等比数列对应项相乘构成的，可把和式的两端同乘以上面的等比数列的公比，然后错位相减求和。

例 11、求数列 $1, 3x, 5x^2, \dots, (2n-1)x^{n-1}$ 前 n 项的和。

解 设 $S_n = 1 + 3x + 5x^2 + \dots + (2n-1)x^{n-1}$. ①

$$(1) \text{当 } x=1 \text{ 时, } S_n = \frac{1+(2n-1)}{2} \cdot n = n^2.$$

$$(2) x=0 \text{ 时, } S_n=1.$$

$$(3) \text{当 } x \neq 0 \text{ 且 } x \neq 1 \text{ 时, 在式①两边同乘以 } x \text{ 得 } xS_n = x + 3x^2 + 5x^3 + \dots + (2n-1)x^n, \text{ ②}$$

$$\text{①}-\text{②, 得 } (1-x)S_n = 1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + \dots + 2x^{n-1} - (2n-1)x^n.$$

$$\begin{aligned} \text{由公式知 } S_n &= \frac{1}{1-x} \left[1 + \frac{2x(1-x^{n-1})}{1-x} - (2n-1)x^n \right] \\ &= \frac{1+x - (2n+1)x^n + (2n-1)x^{n+1}}{(1-x)^2}. \end{aligned}$$

(5) 裂项法:

把通项公式整理成两项(式多项)差的形式，然后前后相消。

常见裂项方法:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n(n+k)} &= \frac{1}{k} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} \right] \\ \frac{1}{n(n+1)(n+2)} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right] \\ \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+k}} &= \frac{1}{k} [\sqrt{n+k} - \sqrt{n}] \end{aligned}$$

$$\text{例 12、求和 } \frac{1}{1 \bullet 5} + \frac{1}{3 \bullet 7} + \frac{1}{5 \bullet 9} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+3)}$$

$$\text{例 3 求和 } \frac{1}{1 \bullet 5} + \frac{1}{3 \bullet 7} + \frac{1}{5 \bullet 9} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+3)}$$

$$\text{解 } a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+3)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+3} \right).$$

$$\begin{aligned} \therefore S_n &= \frac{1}{4} \left[1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+3} \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right] \\ &= \frac{n(4n+5)}{3(2n+1)(2n+3)} \end{aligned}$$

注：在消项时一定要注意消去了哪些项，还剩下哪些项，一般地剩下的正项与负项一样多。

在掌握常见题型的解法的同时，也要注重数学思想在解决数列问题时的应用。

二、常用数学思想方法

1. 函数思想

运用数列中的通项公式的特点把数列问题转化为函数问题解决。

【例 13】 等差数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 > 0$ ，前 n 项的和为 S_n ，若 $S_1 = S_k$ ($1 \neq k$) 问 n 为何值时 S_n 最大？

$$\text{解 依题意, 设 } f(n) = S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$$

$$\therefore f(n) = \frac{1}{2}dn^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n$$

此函数以 n 为自变量的二次函数。 $\because a_1 > 0, S_1 = S_k$ ($1 \neq k$)， $\therefore d < 0$ 故此二次函数的图像开口向下
 $\therefore f(1) = f(k) \therefore \text{当 } n = \frac{1+k}{2} \text{ 时 } f(n) \text{ 最大, } f(n) \text{ 中, } n \in \mathbb{N}.$

$$\therefore \text{当 } 1+k \text{ 为偶数时, } n = \frac{1+k}{2} \text{ 时 } S_n \text{ 最大.}$$

$$\text{当 } 1+k \text{ 为奇数时, } n = \frac{1+k \pm 1}{2} \text{ 时 } S_n \text{ 最大.}$$

2. 方程思想

【例 14】 设等比数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n ，若 $S_3 + S_6 = 2S_9$ ，求数列的公比 q 。

分析 本题考查等比数列的基础知识及推理能力。

解 $\because$ 依题意可知 $q \neq 1$ 。

$\because$ 如果 $q=1$ ，则 $S_3=3a_1, S_6=6a_1, S_9=9a_1$ 。由此应推出 $a_1=0$ 与等比数列不符。

$\therefore q \neq 1$

$$\therefore \text{有 } \frac{a_1(1-q^3)}{1-q} + \frac{a_1(1-q^6)}{1-q} = \frac{2a_1(1-q^9)}{1-q}$$

$$\text{整理得 } q^3(2q^6 - q^3 - 1) = 0 \quad \because q \neq 0$$

$$\therefore 2q^6 - q^3 - 1 = 0 \quad q_1^3 = 1 \text{ 舍, } q_2^3 = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore q = -\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$$

此题还可以作如下思考:

$$S_6 = S_3 + q^3 S_3 = (1+q^3) S_3, S_9 = S_3 + q^3 S_6 = S_3 (1+q^3+q^6),$$

$$\therefore \text{由 } S_3 + S_6 = 2S_9 \text{ 可得 } 2+q^3 = 2(1+q^3+q^6), 2q^6+q^3=0$$

$$q^3 = -\frac{1}{2}, \quad q = -\frac{\sqrt[3]{4}}{2}.$$

3. 换元思想

【例 15】 已知 a, b, c 是不为 1 的正数， $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ ，且

$$\text{有 } a^x = b^y = c^z \text{ 和 } \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{2}{y}.$$

求证： a, b, c 顺次成等比数列。

证明 依题意令 $a^x = b^y = c^z = k$

$$\therefore x = \log_a k, y = \log_b k, z = \log_c k$$

$$\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{2}{y}, \therefore \frac{1}{\log_a k} + \frac{1}{\log_c k} = \frac{2}{\log_b k}$$

$$\text{故 } \frac{\lg a}{\lg k} + \frac{\lg c}{\lg k} = \frac{2\lg b}{\lg k} \quad \text{即 } \lg a + \lg c = 2\lg b$$

$\therefore b^2=ac$ $\therefore a, b, c$ 成等比数列 (a, b, c 均不为 0)

数学 5（必修）第二章：数列

一、选择题

1. 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$ ，则该数列的前（ ）项之和等于 9。

A. 98 B. 99 C. 96 D. 97

2. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $S_4 = 1, S_8 = 4$ ，则 $a_{17} + a_{18} + a_{19} + a_{20}$ 的值为（ ）

A. 9 B. 12 C. 16 D. 17

3. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_2 = 6$ ，且 $a_5 - 2a_4 - a_3 + 12 = 0$ ，则 a_n 为（ ）

A. 6 B. $6 \cdot (-1)^{n-2}$ C. $6 \cdot 2^{n-2}$ D. 6 或 $6 \cdot (-1)^{n-2}$ 或 $6 \cdot 2^{n-2}$

二、填空题

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = -1$ ， $a_{n+1} \cdot a_n = a_{n+1} - a_n$ ，则数列通项 $a_n =$ _____。

2. 已知数列的 $S_n = n^2 + n + 1$ ，则 $a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} =$ _____。

3. 三个不同的实数 a, b, c 成等差数列，且 a, c, b 成等比数列，则 $a:b:c =$ _____。

三、解答题

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 3 + 2^n$ ，求 a_n

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，满足 $S_n = 2a_n - 2n$ ($n \in \mathbf{N}_+$)

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n ；

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \log_2(a_n + 2)$ ， T_n 为数列 $\{\frac{b_n}{a_n + 2}\}$ 的前 n 项和，求证 $T_n \geq \frac{1}{2}$ ；

2. 数列 $\lg 1000, \lg(1000 \cdot \cos 60^\circ), \lg(1000 \cdot \cos^2 60^\circ), \dots, \lg(1000 \cdot \cos^{n-1} 60^\circ), \dots$ 的前多少项和为最大？