微专题　　分段函数

分段函数问题是高考考查的热点问题。分段函数是函数中比较复杂的一种函数，其要点在于自变量取不同范围的值时所使用的解析式不同，所以在解决分段函数的问题时要时刻盯着自变量的范围是否发生变化，进而讨论函数的图象与性质，即“分段函数—分段看”。

热身练习：

1．函数 $f(x)$ 满足 $f(x+4)=f(x)(x\in R)$，且在区间 $(-2,2]$ 上 $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi x}{2},0<x\le 2\\ |x+\dfrac{1}{2}|,-2<x\le 0\end{cases}$，则 $f(f(15))$ 的值为________.

2．已知 $\lambda\in R$，函数 $f(x)=\begin{cases}x-4,x\ge\lambda\\ x^2-4x+3,x<\lambda\end{cases}$，当 $\lambda=2$ 时，不等式 $f(x)<0$ 的解集是_______.若函数 $f(x)$ 恰有 2 个零点，则 λ 的取值范围是____________.

3．已知函数 $f(x)=\begin{cases}e^x,x\le 0\\ \ln x,x>0\end{cases}$，$g(x)=f(x)+x+a$．若 $g(x)$ 存在 2 个零点，则 a 的取值范围是______________.

4．已知函数 $f(x)=\begin{cases}x+\dfrac{1}{2},x\in[0,\dfrac{1}{2})\\ 3x^2,x\in[\dfrac{1}{2},1]\end{cases}$，若存在常数 t 使得方程 $f(x)=t$ 有两个不等的实根 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，那么 $x_1\cdot f(x_2)$ 的取值范围为__________.

例题选讲

例 1．定义域为 R 的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=2f(x)-2$，当 $x\in(0,2]$ 时，$f(x)=\begin{cases}x^2-x,x\in(0,1)\\ \dfrac{1}{x},x\in[1,2]\end{cases}$，若 $x\in(0,4]$ 时，$t^2-\dfrac{7}{2}t\le f(x)\le 3-t$ 恒成立，则实数 t 的取值范围是______________.

例 2．已知函数 $f(x)=\begin{cases}(1-2a)^x, x\le \\ \log_a x+\dfrac{1}{3}, x>1\end{cases}$，当 $x_1\ne x_2$ 时，$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$，则 a 的取值范围是__________.

例 3. 设定义域为 R 的函数 $f(x)=\begin{cases}5^{|x-1|}-1 & x\ge 0\\ x^2+4x+4, & x<0\end{cases}$，若关于 x 的方程 $f^2(x)-(2m+1)f(x)+m^2=0$ 有 5 个不同的实数解，则 m 的取值范围为____________.

变式：已知函数 $f(x)=\begin{cases}|\lg x| & 0<x<10\\ -\dfrac{1}{2}x+6 & x>10\end{cases}$，若方程 $f(x)=m$ 有三个互不相等实数根 a,b,c，则 abc 的取值范围为____________.

例 4．（1）已知 $a>0$，函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2ax+a, x\le 0\\ -x^2+2ax-2a, x>0\end{cases}$，若关于 x 的方程 $f(x)=ax$ 恰有 2 个互异的实数解，则 a 的取值范围为__________.

（2）已知 k 为常数，函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+2}{x+1}, x\le 0\\ |\ln x|, x>0\end{cases}$，若关于 x 的方程 $f(x)=kx+2$ 有且只有四个不同解，则实数 k 的取值范围为______________

例 5．已知 $a\in R$，函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x+a-2, x\le 0\\ -x^2+2x-2a, x>0\end{cases}$，若对任意的 $x\in[-3,+\infty)$，$f(x)\le|x|$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是_______.

巩固提升

1．已知 $f(x)=\begin{cases} x^2, x\le 0 \\ -2\sin x, 0<x\le \pi \end{cases}$，若 $f[f(x_0)]=3$，则 $x_0=$________.

2．函数 $f(x)=\begin{cases} (1-2a)x+3a, (x<1) \\ \ln x, (x\ge 1) \end{cases}$ 的值域为 R，则 a 的取值范围为__________.

3．已知 $g(x)$ 是 R 上的奇函数，当 $x<0$ 时，$g(x)=-\ln(1-x)$，函数 $f(x)=\begin{cases} x^3 & x\le 0 \\ g(x) & x>0 \end{cases}$，若 $f(2-x^2)>f(x)$，则实数 x 的取值范围是__________.

4．已知函数 $f(x)=\begin{cases} \log_2(1-x)+1, -1\le x<k \\ x^3-3x+2, k\le x\le a \end{cases}$，若存在实数 k 使得函数 $f(x)$ 的值域为 $[0,2]$，则实数 a 的取值范围是__________ .

5．函数 $f(x)=\begin{cases} x^2-(4a+1)x-8a+4, x<1 \\ \log_a x, x\ge 1 \end{cases}$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的减函数，则 a 的取值范围为__________.

6．已知函数 $f(x)=\begin{cases}x+2，x>a，\\ x^2+5x+2，x\leqslant a，\end{cases}$ 若函数 $g(x)=f(x)-2x$ 恰有 3 个不同的零点，则实数 a 的取值范围是________.

7. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+4x，x\leqslant 4，\\ \log_2 x，x>4，\end{cases}$ 若函数 $y=f(x)$在区间(a，a＋1)上单调递增，则实数 a 的取值范围是________.

8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}|x|，x\leqslant m，\\ x^2-2mx+4m，x>m，\end{cases}$ 其中 m>0，若存在实数 b，使得关于 x 的方程 $f(x)=b$ 有 3 个不同的根，则 m 的取值范围是________.

参考答案：
热身练习：

1．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

2．$(1,4)$, $(1,3]\cup(4,+\infty)$

3．$[-1,+\infty)$

4．$[\dfrac{3}{16},\dfrac{1}{2})$

例 1．$[1,2]$

例 2．$(0,\dfrac{1}{3}]$

例 3．$m=4$　　变式$(10,12)$

例 4．（1）$(4,8)$；（2）$\left\{\dfrac{1}{e^3}\right\}\cup(-e,-1)$

例 5．$[\dfrac{1}{8},2]$

巩固提升

1．$\dfrac{\pi}{3}$或$\dfrac{2\pi}{3}$

2．$[-1,\dfrac{1}{2})$

3．$(-2,1)$

4．$(\dfrac{1}{2},\sqrt{3}]$

5．$[\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{3}]$

6．$[-1,2)$

7．$(-\infty,1]\cup[4,+\infty)$

8．$(3,+\infty)$