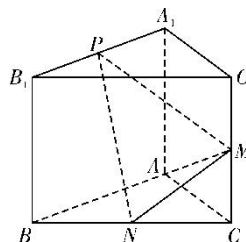


1. 如图，已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧棱与底面垂直， $AA_1=AB=AC=2$ ， $AB \perp AC$ ， M 、 N 分别是 CC_1 、 BC 的中点。

(1) 求异面直线 AB_1 与 BM 所成角的大小；

(2) 求二面角 $C-AN-M$ 的余弦值。



1 解：(1) 如图，以 AB ， AC ， AA_1 分别为 x ， y ， z 轴建立空间直角坐标系，则

$$A(0,0,0), B_1(2,0,2), B(2,0,0), M(0,2,1),$$

$$\therefore \overrightarrow{AB_1} = (2,0,2), \overrightarrow{BM} = (-2,2,1) \text{-----2 分}$$

$$\therefore \cos \langle \overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{BM} \rangle = \frac{-4+0+2}{\sqrt{4+0+4}\sqrt{4+4+1}} = \frac{-6}{6\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \text{-----4 分}$$

$$\therefore \text{异面直线 } AB_1 \text{ 与 } BM \text{ 所成角的大小为 } \frac{\pi}{4}. \text{-----5 分}$$

(2) 平面 ANC 的一个法向量为 $\vec{n} = (0,0,1)$ 。

设平面 AMN 的一个法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$,

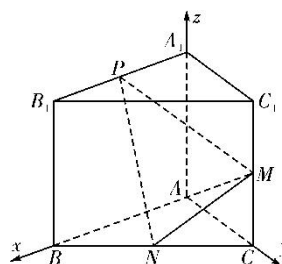
$$\therefore \overrightarrow{AM} = (0,2,1), \overrightarrow{AN} = (1,1,0)$$

$$\text{由 } \vec{m} \cdot \overrightarrow{AM} = 0, \vec{m} \cdot \overrightarrow{AN} = 0 \text{ 得}$$

$$\begin{cases} 2y+z=0 \\ x+y=0 \end{cases}, \text{不妨取 } x=1, \text{则 } y=-1, z=2, \therefore \vec{m} = (1,-1,2) \text{-----7 分}$$

$$\therefore \cos \langle \vec{n}, \vec{m} \rangle = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}, \text{-----9 分}$$

$$\therefore \text{二面角 } C-AN-M \text{ 的余弦值为 } \frac{\sqrt{6}}{3} \text{-----10 分}$$



2.某市工商局对10种商品进行抽样检查,已知其中有3种假货.现从10种商品中选取3种.

- (1)其中某一种假货必须在内,不同的取法有多少种?
- (2)其中某一种假货不能在内,不同的取法有多少种?
- (3)恰有2种假货在内,不同的取法有多少种?
- (4)至少有2种假货在内,不同的取法有多少种?
- (5)至多有2种假货在内,不同的取法有多少种?

3.某班联欢晚会玩投球游戏,规则如下:每人最多可连续投5只球,累积有三次投中即可获奖;否则不获奖.同时要求在以下两种情况下中止投球:①已获奖;②累积3次没有投中目标.已知某同学每次投中目标的概率

是常数 $p(p > 0.5)$,且投完3次就中止投掷的概率为 $\frac{1}{3}$, 设游戏结束时, 该同学投出的球数为 X .

(1) 求 p 的值;

(2) 求 X 的分布列和数学期望.

3.【解析】 (1) 依题意 $P(X=3) = p^3 + (1-p)^3 = \frac{1}{3}$,

解得: $p = \frac{2}{3}$ 或 $p = \frac{1}{3}$ (舍去),

所以 $p = \frac{2}{3}$; 4 分

(2) X 的所有可能值为 3,4,5

$$P(X=3) = \frac{1}{3},$$

$$P(X=4) = C_3^2 p^3 (1-p) + C_3^2 p (1-p)^3 = C_3^2 p (1-p) [p^2 + (1-p)] = \frac{10}{27},$$

$$P(X=5) = C_4^2 p^3 (1-p)^2 + C_4^2 p^2 (1-p)^3 = C_4^2 p^2 (1-p)^2 = \frac{8}{27},$$

$$EX = 3 \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{10}{27} + 5 \times \frac{8}{27} = \frac{107}{27}. \text{ 10 分}$$

4. 已知 $(x+1)^n = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + a_3(x-1)^3 + \cdots + a_n(x-1)^n$, (其中 $n \in N^*$)

(1) $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$;

(2) 试比较 S_n 与 $(n-2)2^n + 2n^2$ 的大小, 并说明理由.

4. 解: (1) 取 $x=1$, 则 $a_0 = 2^n$; 取 $x=2$, 则 $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = 3^n$,

$\therefore S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = 3^n - 2^n$; -----4 分

(2) 要比较 S_n 与 $(n-2)2^n + 2n^2$ 的大小, 即比较: 3^n 与 $(n-1)2^n + 2n^2$ 的大小,

当 $n=1$ 时, $3^n > (n-1)2^n + 2n^2$;

当 $n=2, 3$ 时, $3^n < (n-1)2^n + 2n^2$;

当 $n=4, 5$ 时, $3^n > (n-1)2^n + 2n^2$; -----5 分

猜想: 当 $n \geq 4$ 时, $3^n > (n-1)2^n + 2n^2$, 下面用数学归纳法证明:

由上述过程可知, $n=4$ 时结论成立,

假设当 $n=k, (k \geq 4)$ 时结论成立, 即 $3^k > (k-1)2^k + 2k^2$,

两边同乘以 3 得: $3^{k+1} > 3[(k-1)2^k + 2k^2] = k2^{k+1} + 2(k+1)^2 + [(k-3)2^k + 4k^2 - 4k - 2]$

$(k-3)2^k + 4k^2 - 4k - 2 = (k-3)2^k + 4(k^2 - k - 2) + 6 = (k-3)2^k + 4(k-2)(k+1) + 6 > 0 \quad \therefore$

$$3^{k+1} > ((k+1)-1)2^{k+1} + 2(k+1)^2$$

即 $n=k+1$ 时结论也成立,

$\therefore$ 当 $n \geq 4$ 时, $3^n > (n-1)2^n + 2n^2$ 成立。

综上得,

当 $n=1$ 时, $S_n > (n-2)2^n + 2n^2$;

当 $n=2, 3$ 时, $S_n < (n-2)2^n + 2n^2$;

当 $n \geq 4, n \in N^*$ 时, $S_n > (n-2)2^n + 2n^2$ -----10 分