南京市、盐城市2021届高三年级第二次模拟考试

数学参考答案

一、单项选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．A　2．C　3．D　4．C　5．C　6．B　7．D　8．B

二、多项选择题(本大题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求的．全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分)

9. ACD　10．BC　11．ABD　12．AC

三、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分．

13．36　14．$\dfrac{\sqrt{13}}{2}$　15．$\sqrt{6}$　16．$\dfrac{3}{4}$，2（第一问2分，第二问3分）

四、解答题：本大题共6小题，共70分．

17．(本小题满分10分)

解：在△ABC中，$B=\pi-(A+C)$，所以$\sin B=\sin(A+C)$．

因为$\sin B-\sin(A-C)=\sqrt{3}\sin C$，所以$\sin(A+C)-\sin(A-C)=\sqrt{3}\sin C$，…………2分

即$\sin A\cos C+\cos A\sin C-(\sin A\cos C-\cos A\sin C)=\sqrt{3}\sin C$，

所以$2\cos A\sin C=\sqrt{3}\sin C$．…………4分

在△ABC中，$\sin C\neq 0$，所以$\cos A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．

因为$0<A<\pi$，所以$A=\dfrac{\pi}{6}$．…………6分

选择①

方法1

因为$A=\dfrac{\pi}{6}$，所以$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+9-3\sqrt{3}b$．

又因为$b=\sqrt{3}a$，所以$2b^2-9\sqrt{3}b+27=0$，解得$b=3\sqrt{3}$，或$b=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，

此时△ABC存在．…………8分

当$b=3\sqrt{3}$时，△ABC 的面积为$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times3\sqrt{3}\times3\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$．

当$b=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$时，△ABC 的面积为$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\times3\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{9\sqrt{3}}{8}$．…………10分

方法 2

因为 $b=\sqrt{3}a$，由正弦定理，得 $\sin B=\sqrt{3}\sin A=\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因为 $0<B<\pi$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$，或 $B=\frac{2\pi}{3}$，此时$\triangle ABC$ 存在. ··························8 分

当 $B=\frac{\pi}{3}$时，$C=\frac{\pi}{2}$，所以 $b=c\cos A=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，

所以$\triangle ABC$ 的面积为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{3}}{2}\times 3\times\frac{1}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{8}$.

当 $B=\frac{2\pi}{3}$时，$C=\frac{\pi}{6}$，所以 $b=\frac{c\sin B}{\sin C}=3\sqrt{3}$，

所以$\triangle ABC$ 的面积为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 3\sqrt{3}\times 3\times\frac{1}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{4}$. ···················10 分

选择②

因为 $a=3\cos B$，所以 $a=3\times\frac{a^2+9-b^2}{6a}$，得 $a^2+b^2=9$，

所以 $C=\frac{\pi}{2}$，此时$\triangle ABC$ 存在. ··8 分

因为 $A=\frac{\pi}{6}$，所以 $b=3\times\cos\frac{\pi}{6}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，$a=3\times\sin\frac{\pi}{6}=\frac{3}{2}$，

所以$\triangle ABC$ 的面积为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab=\frac{9\sqrt{3}}{8}$. ···10 分

选择③

由$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，得 $a\sin C=c\sin A=\frac{3}{2}$，···8 分

这与 $a\sin C=1$ 矛盾，所以$\triangle ABC$ 不存在. ···10 分

18．(本小题满分 12 分)

解：（1）**方法 1**

因为 $S_n=2^n+r$，

所以当 $n=1$ 时，$S_1=a_1=2+r$.

当 $n=2$ 时，$S_2=a_1+a_2=4+r$，故 $a_2=2$.

当 $n=3$ 时，$S_3=a_1+a_2+a_3=8+r$，故 $a_3=4$.

因为$\{a_n\}$是等比数列，所以 $a_2^{\ 2}=a_1a_3$，化简得 $2+r=1$，解得 $r=-1$，···········3 分

此时 $S_n=2^n-1$.

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2^n-1-2^{n-1}-1=2^{n-1}$，

当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=1$，$a_n=2^{n-1}$，

所以 $r=-1$ 满足题意. ……………………………………………………………………5 分

方法 2

因为 $S_n=2^n+r$，所以当 $n=1$ 时，$S_1=a_1=2+r$.

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2^n+r-2^{n-1}-r=2^{n-1}$. ……………………………3 分

因为$\{a_n\}$是等比数列，所以 $2+r=1$，解得 $r=-1$. ……………………………5 分

（2）因为 $a_n=2^{n-1}$，所以 $b_n=2(1+\log_2 a_n)=2n$. ……………………………7 分

因为 $a_1=1$，$a_2=2=b_1$，$a_3=4=b_2$，$a_4=8=b_4$，$a_5=16=b_8$，$a_6=32=b_{16}$，

$a_7=64=b_{32}$，$a_8=128=b_{64}$，$a_9=256=b_{128}$， ……………………………9 分

所以 $c_1+c_2+c_3+\cdots+c_{100}$

$=(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{107})-(a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8)$ ……………………11 分

$=\dfrac{107\times(2+214)}{2}-\dfrac{2(1-2^7)}{1-2}=11302$. ……………………………12 分

19．(本小题满分 12 分)

解：（1）对项目 A 投资的统计数据进行计算，有 $\bar{x}=3$，$\bar{y}=0.6$，$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2=55$.

所以 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\ \bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}=\dfrac{11-5\times3\times0.6}{55-5\times3^2}=0.2$， ……………………………4 分

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=0.6-0.2\times3=0$，

所以回归直线方程为：$\hat{y}=0.2x$. ……………………………………………………6 分

线性相关系数 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\ \bar{y}}{\sqrt{(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2)(\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2-n\bar{y}^2)}}=\dfrac{11-5\times3\times0.6}{\sqrt{(55-5\times3^2)(2.24-5\times0.6^2)}}$

$=\dfrac{2}{\sqrt{4.4}}\approx0.9524>0.95$

这说明投资金额 x 与所获利润 y 之间的线性相关关系较强，用线性回归方程 $\hat{y}=0.2x$ 对该组数据进行拟合合理. ……………………………………………………………8 分

（2）设对 B 项目投资 $x(1\leqslant x\leqslant 6)$百万元，则对 A 项目投资$(7-x)$百万元.

所获总利润 $y=0.16x-\dfrac{0.49}{x+1}+0.49+0.2(7-x)$ ……………………………10 分

$=1.93-\left[0.04(x+1)+\dfrac{0.49}{x+1}\right]\leq 1.93-2\sqrt{0.04(x+1)\times\dfrac{0.49}{x+1}}=1.65$，

当且仅当 $0.04(x+1)=\dfrac{0.49}{x+1}$，即 $x=2.5$ 时取等号，

所以对 A，B 项目分别投资 4.5 百万元，2.5 百万元时，获得总利润最大． ……12 分

20．(本小题满分 12 分)

（1）证明：取 AB 中点 D，连接 CD，B_1D．

因为三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的所有棱长都为 2，所以 $AB\perp CD$，$CD=\sqrt{3}$，$BD=1$．

又因为 $AB\perp B_1C$，且 $CD\cap B_1C=C$，CD，$B_1C\subset$平面 B_1CD，

所以 $AB\perp$平面 B_1CD．

又因为 $B_1D\subset$平面 B_1CD，所以 $AB\perp B_1D$． ……………………………………………2 分

在直角三角形 B_1BD 中，$BD=1$，$B_1B=2$，所以 $B_1D=\sqrt{3}$．

在三角形 B_1CD 中，$CD=\sqrt{3}$，$B_1D=\sqrt{3}$，$B_1C=\sqrt{6}$，

所以 $CD^2+B_1D^2=B_1C^2$，所以 $CD\perp B_1D$． ……………………………………………4 分

又因为 $AB\perp B_1D$，$AB\cap CD=D$，AB，$CD\subset$平面 ABC，所以 $B_1D\perp$平面 ABC．

又因为 $B_1D\subset$平面 ABB_1A_1，所以平面 $ABB_1A_1\perp$平面 ABC． ……………………6 分

（2）解：以 DC，DA，DB_1 所在直线为 x，y，z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，

则 $A(0,1,0)$，$B(0,-1,0)$，$C(\sqrt{3},0,0)$，$B_1(0,0,\sqrt{3})$，

因此 $\overrightarrow{BB_1}=(0,1,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AC}=(\sqrt{3},-1,0)$，$\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{BB_1}=(0,1,\sqrt{3})$．

因为点 P 在棱 BB_1 上，则设 $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BB_1}=\lambda(0,1,\sqrt{3})$，其中 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$．

则 $\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{CB}+\lambda\overrightarrow{BB_1}=(-\sqrt{3},-1+\lambda,\sqrt{3}\lambda)$． …………………………8 分

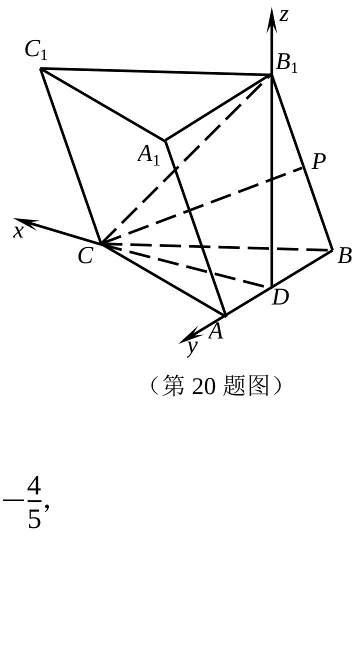
设平面 ACC_1A_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AA_1}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\sqrt{3}x-y=0,\\ y+\sqrt{3}z=0.\end{cases}$

取 $x=1$，$y=\sqrt{3}$，$z=-1$，

所以平面 ACC_1A_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,\sqrt{3},-1)$．

………………………………………………………10 分



（第 20 题图）

因为直线 CP 与平面 ACC_1A_1 所成角的正弦值为 $\dfrac{4}{5}$，

所以 $\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{CP}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CP}}{|\boldsymbol{n}|\times|\overrightarrow{CP}|}=\dfrac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{5}\times\sqrt{3+(\lambda-1)^2+3\lambda^2}}=-\dfrac{4}{5}$，

化简得 $16\lambda^2-8\lambda+1=0$，解得 $\lambda=\dfrac{1}{4}$，

所以 $BP=\lambda BB_1=\dfrac{1}{2}$． ……………………………………………………………12 分

21．(本小题满分 12 分)

解：由 $\begin{cases}y=x+m,\\ y^2=4x,\end{cases}$ 得 $y^2-4y+4m=0$．

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=4$，$y_1y_2=4m$．

因为直线 l 与 C 相交，所以$\triangle=16-16m>0$，得 $m<1$． ……………………………2 分

（1）由 $\overrightarrow{AT}=2\overrightarrow{TB}$，得 $y_1+2y_2=0$， ……………………………………………4 分

所以 $4+y_2=0$，解得 $y_2=-4$，从而 $y_1=8$，

因为 $y_1y_2=4m$，所以 $4m=-32$，解得 $m=-8$． ……………………………………6 分

（2）设 $M(x_3,y_3)$，$N(x_4,y_4)$，

因为 M，N 两点关于直线 $y=x+m$ 对称，

则 $\dfrac{y_4-y_3}{x_4-x_3}=\dfrac{y_4-y_3}{\frac{y_4^2}{4}-\frac{y_3^2}{4}}=\dfrac{4}{y_4+y_3}=-1$，解得 $y_4=-4-y_3$．

又 $\dfrac{y_4+y_3}{2}=\dfrac{x_4+x_3}{2}+m$，

于是 $\dfrac{-4-y_3+y_3}{2}=\dfrac{x_4+x_3}{2}+m$，解得 $x_4=-4-2m-x_3$． …………………8 分

又点 N 在抛物线上，于是 $(-4-y_3)^2=4(-4-2m-x_3)$．

因为 $y_3^2=4x_3$，所以 $y_3^2+4y_3+16+4m=0$， ………………………………………10 分

于是 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(x_1-x_3)(x_2-x_3)+(y_1-y_3)(y_2-y_3)$

$$=\left(\frac{y_1^2}{4}-\frac{y_3^2}{4}\right)\left(\frac{y_2^2}{4}-\frac{y_3^2}{4}\right)+(y_1-y_3)(y_2-y_3)$$

$$=\frac{(y_1-y_3)(y_2-y_3)}{16}[(y_1+y_3)(y_2+y_3)+16]$$

$$=\frac{(y_1-y_3)(y_2-y_3)}{16}[y_1y_2+y_3(y_1+y_2)+y_3^2+16]$$

$$=\frac{(y_1-y_3)(y_2-y_3)}{16}(4m+4y_3+y_3^2+16)=0,$$

因此 $MA\perp MB$，同理 $NA\perp NB$，

于是点 M，N 在以 AB 为直径的圆上，即 A，B，M，N 四点共圆． ……………12 分

22．(本小题满分 12 分)

解：（1）当 $a=\frac{1}{2}$时，$f(x)=e^x-\frac{1}{2}x\sin x-x-1$，

则 $f'(x)=e^x-\frac{1}{2}(x\cos x+\sin x)-1$，$f''(x)=e^x+\frac{1}{2}x\sin x-\cos x$.

因为 $x\in[0,\pi]$，所以 $e^x\geqslant 1$，$\frac{1}{2}x\sin x\geqslant 0$，因此 $f''(x)\geqslant 1-\cos x\geqslant 0$，………………2 分

所以 $f'(x)$在$[0,\pi]$上单调递增，于是 $f'(x)\geqslant f'(0)=0$，

因此 $f(x)$在$[0,\pi]$上单调递增，所以 $f(x)\geqslant f(0)=0$. ……………………………4 分

（2）由（1）知，当 $a\leqslant\frac{1}{2}$时，$f(x)\geqslant e^x-\frac{1}{2}x\sin x-x-1\geqslant 0$，当且仅当 $x=0$ 时取等号，

此时函数 $f(x)$仅有 1 个零点. ………………………………………………………………6 分

当 $a>\frac{1}{2}$时，因为 $f(x)=e^x-ax\sin x-x-1$，

所以 $f'(x)=e^x-a(x\cos x+\sin x)-1$，$f''(x)=e^x+a(x\sin x-2\cos x)$.

当 $x\in[\frac{\pi}{2},\pi]$时，$f''(x)>0$，所以 $f'(x)$单调递增.

当 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$时，$f'''(x)=e^x+a(3\sin x+x\cos x)$.

因为 $e^x>0$，$a(3\sin x+x\cos x)\geqslant 0$，所以 $f'''(x)>0$，所以 $f''(x)$单调递增.

又 $f''(0)=1-2a<0$，$f''(\frac{\pi}{2})=e^{\frac{\pi}{2}}+\frac{\pi}{2}a>0$，

因此 $f''(x)$在$[0,\frac{\pi}{2}]$上存在唯一的零点 x_0，且 $x_0\in(0,\frac{\pi}{2})$. ……………………………8 分

当 $x\in(0,x_0)$时，$f''(x)<0$，所以 $f'(x)$单调递减；

当 $x\in(x_0,\frac{\pi}{2})$时，$f''(x)>0$，所以 $f'(x)$单调递增.

又 $f'(0)=0$，$f'(x_0)<f'(0)=0$，$f'(\pi)=e^{\pi}+a\pi-1>0$，

因此 $f'(x)$在$[0,\pi]$上存在唯一的零点 x_1，且 $x_1\in(x_0,\pi)$. ……………………………10 分

当 $x\in(0,x_1)$时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$单调递减；

当 $x\in(x_1,\pi)$时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$单调递增.

又 $f(0)=0$，$f(x_1)<f(0)=0$，$f(\pi)=e^{\pi}-\pi-1>0$，

所以 $f(x)$在(x_1,π)上存在唯一零点，因此 $f(x)$在$[0,\pi]$上有两个零点.

综上，a 的取值范围是$(\frac{1}{2},+\infty)$. ……………………………………………………12 分