江苏省仪征中学 2019 届高三年级第一学期 12 月份冲刺联考热身训练（3）

班级__________ 姓名__________ 学号__________ 日期__________

一、填空题：

1. 设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x|x^2-2x<0\}$，$B=\{x|x>1\}$，则集合 $A\cap(\complement_U B)=$__________.

2. 设复数 z 满足 $z(2+\mathrm{i})=1-2\mathrm{i}$（i 为虚数单位），则 z 的模为__________.

3. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一条渐近线经过点 $(1,2)$，则该双曲线的离心率为__________.

4. 各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 中，S_n 为其前 n 项和，若 $a_3=1$，且 $S_5=S_2+2$，则公比 q 的值为__________.

5. 下表是关于青年观众的性别与是否喜欢综艺“奔跑吧，兄弟”的调查数据，人数如下表所示：

	不喜欢	喜欢
男性青年观众	40	10
女性青年观众	30	80

现要在所有参与调查的人中用分层抽样的方法抽取 n 个人做进一步的调研，若在“不喜欢的男性青年观众”的人中抽取了 8 人，则 n 的值为__________.

6. 根据如图所示的伪代码，输出 I 的值为__________.

```
S←1
I←1
While S≤9
  S←S+I
  I←I+2
End While
Print I
```

（第 6 题图）

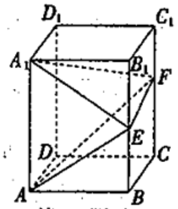
7. 甲，乙两队参加关于“一带一路”知识竞赛，甲队有编号为 1，2，3 的三名运动员，乙队有编号为 1，2，3，4 的四名运动员，若两队各出一名队员进行比赛，则出场的两名运动员编号相同的概率为__________.

8. 函数 $y=\ln(3^x-2^x)$ 的定义域为__________.

9. 设 x、y 满足约束条件 $\begin{cases}x+2y-4\leqslant 0,\\ x-y-1\leqslant 0,\\ 2x+y+1\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=\dfrac{x+1}{y+2}$ 的取值范围是__________.

10. 将函数 $f(x)=\sin x$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位长度后得到函数 $y=g(x)$ 的图象，则函数 $y=f(x)g(x)$ 的最大值为__________.

11. 如图，在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 是平行四边形，点 E 是棱 BB_1 的中点，点 F 是棱 CC_1 上靠近 C_1 的三等分点，且三棱锥 A_1-AEF 的体积为 2，则四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为__________.



（第 11 题图）

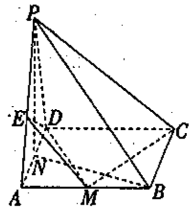
12. 在面积为 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ 的 $\triangle ABC$ 中，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\sqrt{3}$，若点 M 是 AB 的中点，点 N 满足 $\overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{NC}$，则 $\overrightarrow{BN}\cdot\overrightarrow{CM}$ 的最大值是__________.

二、解答题：

1 如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是正方形，$\triangle PAD$ 为等边三角形，M,N 分别是 AB，AD 的中点，且平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$.

(1)证明：$CM\perp$ 平面 PNB；

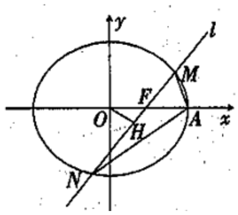
(2)设点 E 是棱 PA 上一点，若 $PC//$ 平面 DEM，求 $PE:EA$ 的值.



2. 如图，已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 经过点 $(-\sqrt{2},\frac{\sqrt{6}}{2})$，且离心率 $e=\frac{1}{2}$，过右焦点 F 且不与坐标轴垂直的直线 l 与椭圆 C 相交于 M,N 两点.

(1)求椭圆 C 的标准方程；

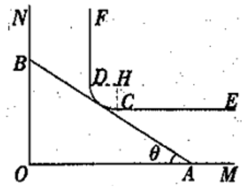
(2)设椭圆 C 的右顶点为 A，线段 MN 的中点为 H，记直线 OH,AM,AN 的斜率分别为 k_0，k_1,k_2，求证：$\frac{k_1+k_2}{k_0}$ 为定值.



3. 如图，某市一学校 H 位于该市火车站 O 北偏东 $45°$ 方向，且 $OH=4\sqrt{2}$ km. 已知 OM，ON 是经过火车站 O 的两条互相垂直的笔直公路，CE，DF 及圆弧 CD 都是学校道路，其中 $CE /\!/ OM$，$DF /\!/ ON$，以学校 H 为圆心，半径为 2 km 的四分之一圆弧分别与 CE，DF 相切于点 C，D. 当地政府欲投资开发△AOB 区域发展经济，其中 A，B 分别在公路 OM，ON 上，且 AB 与圆弧 CD 相切. 设∠$OAB=\theta$，△AOB 的面积为 S km².

(1)求 S 关于 θ 的函数解析式；

(2)当 θ 为何值时，△AOB 面积 S 为最小，政府投资最低？



三、附加题：

1. 已知曲线 C_1：$\frac{y^2}{4}+x^2=1$，对它先作矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}$对应的变换，再作矩阵 $B=\begin{bmatrix}0 & b\\1 & 0\end{bmatrix}$对应的变换，得到曲线 C_2：$x^2+y^2=1$，求实数 b 的值.

2. 在极坐标系中，圆 C 的方程为 $\rho=2a\cos\theta$，以极点为坐标原点，极轴为 x 轴的正半轴建立平面直角坐标系 $O-xyz$，直线 l 的参数方程为$\begin{cases}x=3t+5\\y=4t+6\end{cases}$，（$t$ 为参数）. 若直线 l 与圆 C 相离，求实数 a 的取值范围.

3. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $A(4,0)$，点 B 在 y 轴上，动点 P 满足 $PB\parallel x$ 轴，且 $OP\perp AB$.

(1)求动点 P 的轨迹 C 的方程；

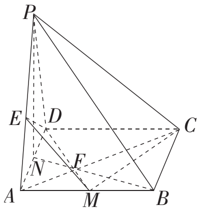
(2)若直线 l 与轨迹 C 相交于 M，N 两点(异于原点 O)，且$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=80$，设点 A 关于直线 OM 的对称点为 Q，求四边形 $OQMN$ 的面积的最小值.

高三年级第一学期12月份冲刺联考热身训练（3）答案

一、填空题：

1.$(0,1]$　2.1　3.$\sqrt{5}$　4.$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　5.32　6.7　7.$\frac{1}{4}$　8.$(0,+\infty)$　9.$[-\frac{1}{5},1]$　10.$\frac{3}{4}$　11.12　12.$\frac{8\sqrt{3}}{3}-2\sqrt{6}$

二、解答题：



1. (1)证明：在正方形 $ABCD$ 中，M,N 分别是 AB,AD 的中点，

$\therefore BM=AN, BC=AB, \angle MBC=\angle NAB=90°$，

$\therefore \triangle MBC\cong\triangle NAB$，$\therefore \angle BCM=\angle NBA$. 又$\angle BCM+\angle BMC=90°$，

$\therefore \angle NBA+\angle BMC=90°$，$\therefore CM\perp BN$. ………… 2分

$\because \triangle PAD$ 为等边三角形，N 是 AD 的中点，$\therefore PN\perp AD$.

又平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$，$PN\subset$平面 PAD，平面 $PAD\cap$平面 $ABCD=AD$，

$\therefore PN\perp$平面 $ABCD$. ………………………………………………………… 4分

又 $CM\subset$平面 $ABCD$，

$\therefore CM\perp PN$.

$\because BN, PN\subset$平面 PNB，$BN\cap PN=N$，

$\therefore CM\perp$平面 PNB. ………………………………………………………… 7分

(2)解：连接 AC 交 DM 于点 Q，连接 EQ.

$\because PC//$平面 DEM，$PC\subset$平面 PAC，平面 $PAC\cap$平面 $DEM=EQ$，

$\therefore PC// EQ$.

$\therefore PE:EA=CQ:QA$. ………………………………………………………… 10分

在正方形 $ABCD$ 中，$AM// CD$，且 $CD=2AM$，$\therefore CQ:QA=CD:AM=2$.

$\therefore PE:EA=2$. ………………………………………………………… 14分

2. (1)解：设椭圆的焦距为 $2c$，则$\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，即 $a=2c$，所以 $b^2=a^2-c^2=3c^2$.

依题意，$\frac{2}{a^2}+\frac{3}{2b^2}=1$，即$\frac{2}{4c^2}+\frac{3}{2\times 3c^2}=1$，解得 $c^2=1$，$c=1$. 所以 $a=2$，$b^2=3$.

所以椭圆 C 的标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ………………………………………… 4分

(2)证明：依题意，直线 l 的斜率存在，且不为 0，设其为 k，

则直线 l 的方程为 $y=k(x-1)$，设 $M(x_1, y_1)$，$N(x_2, y_2)$.

与椭圆联立$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\ y=k(x-1),\end{cases}$整理得$(4k^2+3)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$，故$\begin{cases}x_1+x_2=\frac{8k^2}{4k^2+3},\\ x_1x_2=\frac{4k^2-12}{4k^2+3}.\end{cases}$ ……… 6分

所以 $x_H=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{4k^2}{4k^2+3}$，$y_H=k(x_H-1)=-\frac{3k}{4k^2+3}$，

所以 $k_0=\frac{y_H}{x_H}=\frac{-\frac{3k}{4k^2+3}}{\frac{4k^2}{4k^2+3}}=-\frac{3}{4k}$. ………………………………………… 9分

又 $k_1+k_2=\frac{y_1}{x_1-2}+\frac{y_2}{x_2-2}=\frac{k(x_1-1)}{x_1-2}+\frac{k(x_2-1)}{x_2-2}=k\cdot\frac{2x_1x_2-3(x_1+x_2)+4}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}$

$=k\cdot\frac{2\cdot\frac{4k^2-12}{4k^2+3}-3\cdot\frac{8k^2}{4k^2+3}+4}{\frac{4k^2-12}{4k^2+3}-2\cdot\frac{8k^2}{4k^2+3}+4}=-\frac{3}{k}$，所以$\frac{k_1+k_2}{k_0}=\frac{-\frac{3}{k}}{-\frac{3}{4k}}=4$ 为定值，得证. …………… 14分

3. 解：(1)以点 O 为坐标原点建立如图所示的平面直角坐标系，则 $H(4,4)$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABO$ 中，设 $AB=l$，又 $\angle OAB=\theta$，故 $OA=l\cos\theta$，$OB=l\sin\theta$.

所以直线 AB 的方程为 $\dfrac{x}{l\cos\theta}+\dfrac{y}{l\sin\theta}=1$，即 $x\sin\theta+y\cos\theta-l\sin\theta\cos\theta=0$.

因为直线 AB 与圆 H 相切，

所以 $\dfrac{|4\sin\theta+4\cos\theta-l\sin\theta\cos\theta|}{\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta}}=2$. （$*$）…………………………………… 3

因为点 H 在直线 AB 的上方，

所以 $4\sin\theta+4\cos\theta-l\sin\theta\cos\theta>0$，

所以（$*$）式可化为 $4\sin\theta+4\cos\theta-l\sin\theta\cos\theta=2$，解得 $l=\dfrac{4(\sin\theta+\cos\theta)-2}{\sin\theta\cos\theta}$.

所以 $OA=\dfrac{4(\sin\theta+\cos\theta)-2}{\sin\theta}$，$OB=\dfrac{4(\sin\theta+\cos\theta)-2}{\cos\theta}$.

所以 $\triangle AOB$ 面积为 $S=\dfrac{1}{2}OA\cdot OB=2\cdot\dfrac{[2(\sin\theta+\cos\theta)-1]^2}{\sin\theta\cos\theta}$，$\theta\in(0,\dfrac{\pi}{2})$.

…… 7 分

(2)令 $t=2(\sin\theta+\cos\theta)-1$，则 $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{t^2+2t-3}{8}$，

且 $t=2(\sin\theta+\cos\theta)-1=2\sqrt{2}\sin(\theta+\dfrac{\pi}{4})-1\in(1,2\sqrt{2}-1]$，

所以 $S=2\cdot\dfrac{t^2}{\dfrac{t^2+2t-3}{8}}=\dfrac{16}{-\dfrac{3}{t^2}+\dfrac{2}{t}+1}$，$t\in(1,2\sqrt{2}-1]$. ………………………………………………………… 10 分

令 $m=\dfrac{1}{t}\in[\dfrac{2\sqrt{2}+1}{7},1)$，$g(m)=-3m^2+2m+1=-3(m-\dfrac{1}{3})^2+\dfrac{4}{3}$，所以 $g(m)$ 在 $[\dfrac{2\sqrt{2}+1}{7},1)$ 上单调递减.

所以，当 $m=\dfrac{2\sqrt{2}+1}{7}$，即 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 时，$g(m)$ 取得最大值，S 取最小值.

答：当 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 时，$\triangle AOB$ 面积 S 为最小，政府投资最低. ………………………………………………………… 14 分

三、附加题：

1．解：设点 $P_1(x_1,y_1)$是曲线 C_1 上任意一点，其依次经过 T_A,T_B 变换后得到点 $P_2(x_2,y_2)$，

所以$\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&b\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&b\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\2y_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2by_1\\x_1\end{bmatrix}$，

即$\begin{cases}x_2=2by_1,\\y_2=x_1.\end{cases}$ ………………………………………………………………………………………… 5 分

因为点 P_2 在曲线 $C_2:x^2+y^2=1$ 上，所以 $4b^2y_1^2+x_1^2=1$.

又$\frac{y_1^2}{4}+x_1^2=1$，所以 $4b^2=\frac{1}{4}$，解得 $b=\pm\frac{1}{4}$.

所以实数 b 的值为$\pm\frac{1}{4}$. …………………………………………………………………………… 10 分

2．解：因为圆 C 的方程为 $\rho=2a\cos\theta$，所以其直角坐标方程为 $x^2+y^2-2ax=0$，

即$(x-a)^2+y^2=a^2$，

又因为直线 l 的参数方程为$\begin{cases}x=3t+5,\\y=4t+6\end{cases}$（$t$ 为参数），

其普通方程为 $4x-3y-2=0$. ……………………………………………………………………… 4 分

因为直线 l 与圆 C 相离，

所以圆心 $C(a,0)$到直线 l 的距离 $d>r$，即$\frac{|4a-2|}{\sqrt{4^2+3^2}}>|a|$，解得$-2<a<\frac{2}{9}$.

所以实数 a 的取值范围是$-2<a<\frac{2}{9}$. …………………………………………………………… 10 分

3．解：(1)设点 $P(x,y)$，据 $PB/\!/x$ 轴，可得 $B(0,y)$.

又 $OP\perp AB$，所以$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，即$(x,y)\cdot(-4,y)=0$，整理得 $y^2=4x$.

显然，当 $x=0$ 时，P,B,O 三点重合，不符题意，

所以动点 P 的轨迹 C 的方程为 $y^2=4x(x\neq0)$. ……………………………………………………… 3 分

(2)依题意，直线 l 不与 x 轴平行，设直线 l 的方程为 $x=my+t$，$M(\frac{y_1^2}{4},y_1)$，$N(\frac{y_2^2}{4},y_2)$.

联立方程组$\begin{cases}y^2=4x,\\x=my+t,\end{cases}$整理得 $y^2-4my-4t=0$，所以$\begin{cases}\Delta=16m^2+16t>0,\\y_1+y_2=4m,\\y_1y_2=-4t.\end{cases}$

因为$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=80$，所以$\frac{y_1^2}{4}\cdot\frac{y_1^2}{4}+y_1y_2=0$，解得 $y_1y_2=-16$ 或 0(舍).

所以$-16=-4t$，解得 $t=4$.

所以直线 $l:x=my+4$，经过点 $A(4,0)$. ………………………………………………………… 7 分

所以四边形 $OQMN$ 的面积$S=S_{\triangle OAN}+2S_{\triangle OAM}=\frac{1}{2}\times4\times|y_2|+2\times\frac{1}{2}\times4\times|y_1|$

$=2|y_2|+4|y_1|\geqslant2\sqrt{2|y_2|\times4|y_1|}=4\sqrt{2}\sqrt{|y_1y_2|}=4\sqrt{2}\sqrt{|-16|}=16\sqrt{2}$，

当且仅当 $2|y_2|=4|y_1|$，即$|y_2|=2|y_1|$时，取等号.

所以四边形 $OQMN$ 的面积的最小值 $16\sqrt{2}$. ………………………………………………………… 10 分