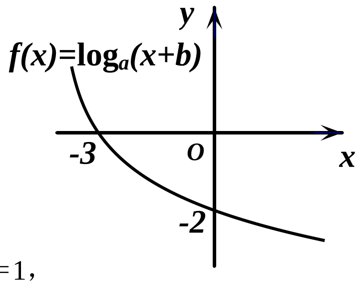
江苏省仪征中学2020届高三上学期数学(文)周末限时训练1（2019.9.7）

一、填空题：本大题共 14 小题，每小题 5 分，共 70 分.

1、若复数 $z=\dfrac{1+3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$(i 为虚数单位)，则 $|z|=$ ▲ .

2、已知集合 $A=\{2+\sqrt{a},a\}$，$B=\{-1,1,3\}$，且 $A\subset B$，则实数 a 的值是 ▲ .

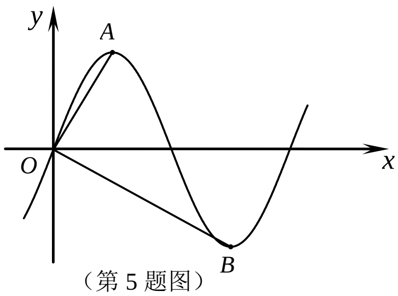
3、已知函数 $f\left(x\right)=\log_a\left(x+b\right)$（$a>0,a\neq1,b\in\mathrm{R}$）



的图像如图所示，则 $a+b$ 的值是 ▲ .

4、已知向量 $\boldsymbol{m}=(\cos\alpha，\sin\alpha)$，$\boldsymbol{n}=(2，1)$，$\alpha\in\left(-\dfrac{\pi}{2}，\dfrac{\pi}{2}\right)$，若 $\boldsymbol{m}\,\boldsymbol{n}=1$，

则 $\sin\left(2\alpha+\dfrac{3\pi}{2}\right)=$ ▲ .



（第 5 题图）

5、如图，已知 A，B 分别是函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x(\omega>0)$在 y 轴右侧图象上的第一个最高点和第一个最低点，且$\angle AOB=\dfrac{\pi}{2}$，则该函数的周期是 ▲ .

6、若命题“$\exists x\in\mathbf{R}$，使得 $x^2+(a-1)x+1<0$”是真命题，则实数 a 的取值范围是 ▲ .

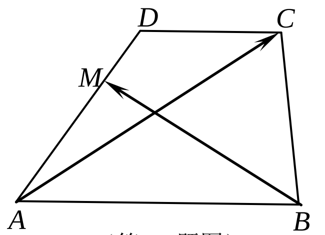
7、已知 $f\left(x\right)=\begin{cases}2^x-3,x>0,\\ g\left(x\right),x<0,\end{cases}$是奇函数，则 $f\left(g\left(-2\right)\right)=$ ▲ .

8、已知平面向量 $\vec{a}=(2,1),\vec{a}\cdot\vec{b}=10$，若 $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=5\sqrt{2}$，则 $\left|\vec{b}\right|$ 的值是 ▲ .

9、若 x，y 满足约束条件$\begin{cases}x-1\geqslant0,\\ x-y\leqslant0,\\ x+y-4\leqslant0,\end{cases}$ 则 $\dfrac{y}{x}$ 的最大值为 ▲ .

10、已知函数 $f(x)=x^3-ax^2+4$，若 $f(x)$的图象与 x 轴正半轴有两个不同的交点，则实数 a 的取值范围为 ▲ .

11、如图，在梯形 $ABCD$ 中，$AB // CD$，$AB=4$，$AD=3$，$CD=2$，$\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MD}$．若 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BM}=-3$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=$____▲____．



（第 11 题图）

12、已知正实数 x，y 满足 $x+y+3=xy$，若对任意满足条件的 x，y 都有$(x+y)^2-a(x+y)+1\geq 0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为________．

13、在 ΔABC 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，若 ΔABC 为锐角三角形，且满足 $b^2-a^2=ac$，则 $\frac{1}{\tan A}-\frac{1}{\tan B}$ 的取值范围是____▲____．

14、已知函数 $f(x)=\begin{cases}2x^2-3x，x\leq 0，\\ e^x+e^2，x>0.\end{cases}$ 若不等式 $f(x)\geq kx$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，则实数 k 的取值范围是___▲___．

二、解答题：本大题共 6 小题，共 90 分．解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤．

15、(本小题满分 14 分) 在 ΔABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a, b, c，且 $\sin A+\cos^2\frac{B+C}{2}=1$，D 为 BC 上一点，且 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.

（1）求 $\sin A$ 的值；

（2）若 $a=4\sqrt{2},b=5$，求 AD 的长.

16、(本小题满分 14 分) 已知 $a>0$，函数 $f(x)=-2a\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+2a+b$，当 $x\in\left[0，\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$-5\leq f(x)\leq 1$.

(1)求常数 a，b 的值；

(2)设 $g(x)=f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$且 $\lg g(x)>0$，求 $g(x)$的单调区间.

17、(本小题满分 14 分) 在平面直角坐标系 xOy 中，圆 O：$x^2+y^2=4$，直线 l：$4x+3y-20=0$．$A(\frac{4}{5},\frac{3}{5})$ 为圆 O 内一点，弦 MN 过点 A，过点 O 作 MN 的垂线交 l 于点 P.

（1）若 $MN\parallel l$，求△PMN 的面积.

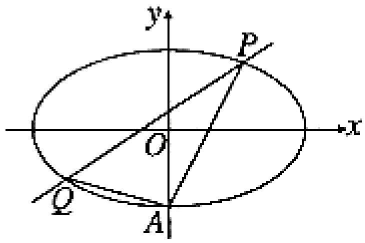
（2）判断直线 PM 与圆 O 的位置关系，并证明.

18、(本小题满分 16 分) 如图，椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 经过点 $A(0,-1)$，且离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(1)求椭圆 E 的方程;

(2)经过点 $(1,1)$ 的直线与椭圆 E 交于不同两点 P,Q（均异于点 A），

证明：直线 AP 与 AQ 的斜率之和为定值



19、(本小题满分 16 分) 中国古建筑中的窗饰是艺术和技术的统一体，给人于美的享受．如图（1）为一花窗；图（2）所示是一扇窗中的一格，呈长方形，长 30 cm，宽 26 cm，其内部窗芯（不含长方形边框）用一种条形木料做成，由两个菱形和六根支条构成，整个窗芯关于长方形边框的两条对称轴成轴对称．设菱形的两条对角线长分别为 x cm 和 y cm，窗芯所需条形木料的长度之和为 L．

（1）试用 x，y 表示 L；

（2）如果要求六根支条的长度均不小于 2 cm，每个菱形的面积为 130 cm^2，那么做这样一个窗芯至少需要多长的条形木料（不计榫卯及其它损耗）？

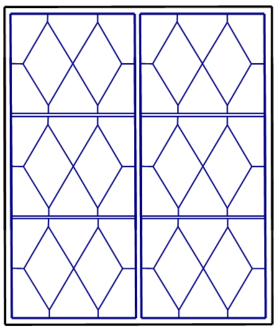


图 1

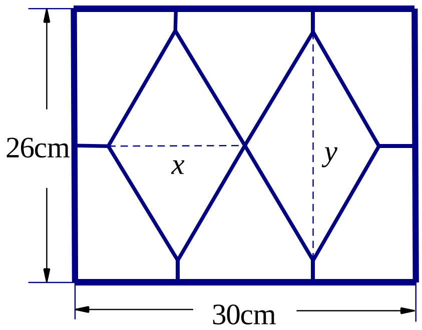


图 2

D　　　　C

20、(本小题满分 16 分)已知函数 $f(x)=x^3-3x^2+(2-a)x$， $a\in\mathbf{R}$.

（1）求函数 $f(x)$ 的单调增区间；

（2）若函数 $f(x)$ 有三个互不相同的零点 0， t_1， t_2， 其中 $t_1<t_2$.

（ i ）若 $t_2=3t_1$， 求 a 的值；

（ ii ）若对任意的 $x\in[t_1，t_2]$， 都有 $f(x)\leqslant 16-a$ 成立，求 a 的取值范围.

江苏省仪征中学2020届高三上学期数学(文)周末限时训练1答案

1、$\sqrt{5}$；　2、1；　3、$\dfrac{9}{2}$；　4、$-\dfrac{7}{25}$；　5、4；　6、$(-\infty，-1)\cup(3，+\infty)$；　7、1；

8、5；　9、3；　10、$(3，+\infty)$；　11、$\dfrac{3}{2}$；　12、$\left(-\infty，\dfrac{37}{6}\right]$；

13、$(1,\dfrac{2\sqrt{3}}{3})$；14、$[-3,e^2]$。

15、

解：（1）$\because \sin A+\cos^2\dfrac{B+C}{2}=1$，

$\therefore \sin A+\dfrac{1+\cos(B+C)}{2}=1$，　即 $2\sin A-\cos A=1$，　……………………2分

$\therefore (2\sin A-1)^2=\cos^2 A$，即 $5\sin^2 A-4\sin A=0$，　……………………4分

$\because A\in(0,\pi)$，　$\therefore \sin A>0$，

$\therefore \sin A=\dfrac{4}{5}$，$\cos A=\dfrac{3}{5}$．　……………………6分

（2）在$\triangle ABC$中，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

$\therefore 32=25+c^2-2\times5c\times\dfrac{3}{5}$ 即 $c^2-6c-7=0$ 解得 $c=7$，　……………………10分

$\because \overline{AD}=\dfrac{1}{4}\overline{AB}+\dfrac{3}{4}\overline{AC}$，

$\therefore \overline{AD}^2=\dfrac{1}{16}c^2+\dfrac{9}{16}b^2+\dfrac{3}{8}bc\cos A=\dfrac{49}{16}+\dfrac{9}{16}\times25+\dfrac{3}{8}\times7\times5\times\dfrac{3}{5}=25$，　……………………12分

$\therefore AD=5$．　……………………14分

16、 解　(1)$\because x\in\left[0，\dfrac{\pi}{2}\right]$，$\therefore 2x+\dfrac{\pi}{6}\in\left[\dfrac{\pi}{6}，\dfrac{7\pi}{6}\right]$.$\therefore \sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)\in\left[-\dfrac{1}{2}，1\right]$，又$\because a>0$，

$\therefore -2a\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)\in[-2a，a]$．$\therefore f(x)\in[b,3a+b]$，

又$\because -5\le f(x)\le 1$，$\therefore b=-5,3a+b=1$，因此 $a=2$，$b=-5$.

(2)由(1)得 $a=2$，$b=-5$，$\therefore f(x)=-4\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)-1$，

$g(x)=f\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=-4\sin\left(2x+\dfrac{7\pi}{6}\right)-1=4\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)-1$，

又由 $\lg g(x)>0$，得 $g(x)>1$，

$\therefore 4\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)-1>1$，$\therefore \sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)>\dfrac{1}{2}$，$\therefore 2k\pi+\dfrac{\pi}{6}<2x+\dfrac{\pi}{6}<2k\pi+\dfrac{5\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$，

其中当 $2k\pi+\frac{\pi}{6}<2x+\frac{\pi}{6}\le 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，$g(x)$单调递增，即 $k\pi<x\le k\pi+\frac{\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$，

$\therefore g(x)$的单调增区间为$\left(k\pi，k\pi+\frac{\pi}{6}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

又$\because$当 $2k\pi+\frac{\pi}{2}<2x+\frac{\pi}{6}<2k\pi+\frac{5\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，$g(x)$单调递减，即 $k\pi+\frac{\pi}{6}<x<k\pi+\frac{\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$.

$\therefore g(x)$的单调减区间为$\left(k\pi+\frac{\pi}{6}，k\pi+\frac{\pi}{3}\right)$，$k\in\mathbf{Z}$.

综上，$g(x)$的递增区间为$\left(k\pi，k\pi+\frac{\pi}{6}\right](k\in\mathbf{Z})$；递减区间为$\left(k\pi+\frac{\pi}{6}，k\pi+\frac{\pi}{3}\right)(k\in\mathbf{Z})$.

17、**解**：（1）因为 $MN /\!/ l$，设直线 MN 的方程为 $4x+3y+c=0$，

由条件得，$4\times\frac{4}{5}+3\times\frac{3}{5}+c=0$，解得 $c=-5$，即直线 MN 的方程为 $4x+3y-5=0$.

因为 $k_{OA}=\frac{3}{4}$，$k_{MN}=-\frac{4}{3}$，所以 $k_{OA}\cdot k_{MN}=-1$，即 $OA\perp MN$，

所以 $MN=2\sqrt{4-OA^2}=2\sqrt{3}$.

又因为直线 MN 与直线 l 间的距离 $d=\frac{|-20-(-5)|}{\sqrt{4^2+3^2}}=3$，即点 P 到直线 MN 的距离为 3，

所以△PMN 的面积为 $\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 3=3\sqrt{3}$.

（2）直线 PM 与圆 O 相切，证明如下：

设 $M(x_0，y_0)$，则直线 MN 的斜率 $k=\frac{y_0-\frac{3}{5}}{x_0-\frac{4}{5}}=\frac{5y_0-3}{5x_0-4}$，

因为 $OP\perp MN$，所以直线 OP 的斜率为 $-\frac{5x_0-4}{5y_0-3}$，

所以直线 OP 的方程为 $y=-\frac{5x_0-4}{5y_0-3}x$.

联立方程组 $\begin{cases} y=-\frac{5x_0-4}{5y_0-3}x, \\ 4x+3y-20=0, \end{cases}$ 解得点 P 的坐标为 $\left(\frac{4(5y_0-3)}{4y_0-3x_0},-\frac{4(5x_0-4)}{4y_0-3x_0}\right)$，

所以 $\overrightarrow{PM}=\left(\frac{4(5y_0-3)}{4y_0-3x_0}-x_0,-\frac{4(5x_0-4)}{4y_0-3x_0}-y_0\right)$，

由于 $\overrightarrow{OM}=(x_0，y_0)$，$x_0^2+y_0^2=4$，

所以$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{OM}=\dfrac{4x_0(5y_0-3)}{4y_0-3x_0}-x_0^2-\dfrac{4y_0(5x_0-4)}{4y_0-3x_0}-y_0^2$

$=\dfrac{4x_0(5y_0-3)-4y_0(5x_0-4)}{4y_0-3x_0}-4=\dfrac{-12x_0+16y_0}{4y_0-3x_0}-4=0$，

所以$\overrightarrow{PM}\perp\overrightarrow{OM}$，即$PM\perp OM$，所以直线$PM$与圆$O$相切，得证.

18、解：（1）由题意知$\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2},b=1,$综合$a^2=b^2+c^2$，解得，$a=\sqrt{2}$，

所以椭圆方程为$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$………5 分

(2)由题义知，当直线PQ垂直x轴时，即PQ斜率不存在时，PQ方程为$x=1$

与椭圆$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$联立可求P,Q坐标为$(1,\dfrac{\sqrt{2}}{2}),(1,-\dfrac{\sqrt{2}}{2})$，所以有$k_{AP}+k_{AQ}=2$………7 分

当直线PQ不垂直x轴时，设PQ的斜率为k，则直线PQ的方程为$y=k(x-1)+1(k\neq 2)$，代入

$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$，得 $(1+2k^2)x^2-4k(k-1)x+2k(k-2)=0$，（1）

由已知$\Delta>0$，设$P\left(x_1y_1\right),Q\left(x_2y_2\right)$，$x_1x_2\neq 0$，则$x_1,x_2$是（1）的两个根，由韦达定理得

$x_1+x_2=\dfrac{4k(k-1)}{1+2k^2},x_1x_2=\dfrac{2k(k-2)}{1+2k^2}$，（2）………9 分

从而直线AP与AQ的斜率之和$k_{AP}+k_{AQ}=\dfrac{y_1+1}{x_1}+\dfrac{y_2+1}{x_2}=\dfrac{kx_1+2-k}{x_1}+\dfrac{kx_2+2-k}{x_2}$………12 分

$=2k+(2-k)\left(\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}\right)=2k+(2-k)\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}$把（2）代人得………14 分

$k_{AP}+k_{AQ}\ =2k+\left(2-k\right)\dfrac{4k(k-1)}{2k(k-2)}=2k-(2k-1)=2$.为定值，

综上，结论成立………………16 分

19、**解**：（1）由题意，水平方向每根支条长为$m=\dfrac{30-2x}{2}=15-x$ cm，

竖直方向每根支条长为$n=\dfrac{26-y}{2}=13-\dfrac{y}{2}$ cm，菱形的边长为$\sqrt{(\dfrac{x}{2})^2+(\dfrac{y}{2})^2}=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$ cm.

从而，所需木料的长度之和

$L=2(15-x)+4(13-\frac{y}{2})+8\times\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}=82+4\sqrt{x^2+y^2}-2(x+y)$ cm.

（2）由题意， $\frac{1}{2}xy=13$，即 $y=\frac{260}{x}$， 又由 $\begin{cases}15-x\geqslant 2,\\ 13-\frac{y}{2}\geqslant 2,\end{cases}$ 可得 $\frac{130}{11}\leqslant x\leqslant 13$.

所以 $L=82+4\sqrt{x^2+(\frac{260}{x})^2}-2(x+\frac{260}{x})$.

令 $t=x+\frac{260}{x}$，其导函数 $1-\frac{260}{x^2}<0$ 在 $\frac{130}{11}\leqslant x\leqslant 13$ 上恒成立，

故 $t=x+\frac{260}{x}$ 在 $[\frac{130}{11},13]$ 上单调递减，所以可得 $t\in[33,\frac{372}{11}]$.

则 $L=82+2[2\sqrt{(x+\frac{260}{x})^2-520}-(x+\frac{260}{x})]$

$$=82+2[\sqrt{t^2-520}+\sqrt{t^2-520}-t]=82+2[\sqrt{t^2-520}+\frac{-520}{\sqrt{t^2-520}+t}] .$$

因为函数 $y=\sqrt{t^2-520}$ 和 $y=\frac{-520}{\sqrt{t^2-520}+t}$ 在 $t\in[33,\frac{372}{11}]$ 上均为增函数，

所以 $L=82+2[\sqrt{t^2-520}+\frac{-520}{\sqrt{t^2-520}+t}]$ 在 $t\in[33,\frac{372}{11}]$ 上为增函数，故当 $t=33$，

即 $x=13, y=20$ 时 L 有最小值 $16+4\sqrt{569}$.

答：做这样一个窗芯至少需要 $16+4\sqrt{569}$ cm 长的条形木料.

20、（1） $f'(x)=3x^2-6x+(2-a)$，其判别式 $\Delta=(-6)^2-12(2-a)=12(a+1)$.

①当 $a\leqslant -1$ 时， $\Delta\leqslant 0$， $f'(x)\geqslant 0$ 恒成立，

所以 $f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty,+\infty)$. ……………………………………………1 分

②当 $a>-1$ 时，由 $f'(x)>0$，得 $x<\frac{3-\sqrt{3(a+1)}}{3}$ 或 $x>\frac{3+\sqrt{3(a+1)}}{3}$，

所以 $f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty,\frac{3-\sqrt{3(a+1)}}{3})$， $(\frac{3+\sqrt{3(a+1)}}{3},+\infty)$. 3 分

综上，当 $a\leqslant -1$ 时， $f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty,+\infty)$；

当$a>-1$时，$f(x)$的单调增区间为$(-\infty,\frac{3-\sqrt{3(a+1)}}{3})$，$(\frac{3+\sqrt{3(a+1)}}{3},+\infty)$．4 分

（2）（ⅰ）方程$f(x)=0$，即为$x^3-3x^2+(2-a)x=0$，亦即$x[x^2-3x+(2-a)]=0$，

由题意t_1，t_2是方程$x^2-3x+(2-a)=0$的两个实根， ………………5 分

故$t_1+t_2=3$，$t_1t_2=2-a$，且判别式$\Delta_1=(-3)^2-4(2-a)>0$，得$a>-\frac{1}{4}$．

由$t_2=3t_1$，得$t_1=\frac{3}{4}$，$t_2=\frac{9}{4}$， ………………………………………………8 分

故$t_1t_2=2-a=\frac{27}{16}$，所以$a=\frac{5}{16}$． ………………………………………………9 分

（ⅱ）因为对任意的$x\in[t_1,t_2]$，$f(x)\leqslant 16-a$恒成立.

因为$t_1+t_2=3$，$t_1<t_2$，所以$t_1<\frac{3}{2}<t_2$，

所以$0<t_1<t_2$或$t_1<0<t_2$．

①当$0<t_1<t_2$时，对$x\in[t_1,t_2]$，$f(x)\leqslant 0$，

所以$0\le 16-a$，所以$a\le 16$．

又$t_1t_2=2-a>0$，所以$a<2$． ………………………………………………12分

②当$t_1<0<t_2$时，$f'(x)=3x^2-6x+(2-a)$，

由（1）知，存在$f(x)$的极大值点$x_1\in(t_1,0)$，且$x_1=\frac{3-\sqrt{3(a+1)}}{3}$．

（方法1）由题得$f(x_1)=x_1^3-3x_1^2+(2-a)x_1\leqslant 16-a$，

将$x_1=\frac{3-\sqrt{3(a+1)}}{3}$代入化简得$(a+1)\sqrt{3(a+1)}\leqslant 72$，解得$a\leqslant 11$．…14分

又$t_1t_2=2-a<0$，所以$a>2$．因此$2<a\leqslant 11$． ……………………………15分

综上，a的取值范围是$(-\frac{1}{4},2)\cup(2,11]$． ………………………………………16分

（方法2）$a=3x_1^2-6x_1+2$，由题得$f(x_1)=x_1^3-3x_1^2+(2-a)x_1\leqslant 16-a$，

将$a=3x_1^2-6x_1+2$，代入化简得$(x_1-1)^3\geqslant -8$，

得 $x_1 \geqslant -1$，故 $-1 \leqslant x_1 < 0$，

因为 $a = 3x_1^2 - 6x_1 + 2$ 在 $x_1 \in [-1,0)$ 上递减，故 $a \in (2,11]$.

综上，a 的取值范围是 $(-\frac{1}{4},2) \cup (2,11]$.　…………………………………………16 分