

巧用“粗”直线解决一类零点个数问题

朱亮亮

江苏省昆山市第一中学 215300

[摘要] 文章研究了夹在两条直线之间的条形区域表示的“粗”直线在解决交点(零点或解)的个数问题上的应用,并在此基础上锻炼学生的创造性思维.

[关键词] “粗”直线;条形区域;零点个数

有道小学趣味题:画一条直线,把图形(如图1)分成两个三角形.

答案出乎意料,是画一条很粗的直线(如图2).结果似乎很滑稽,与其说是数学题,不如说是脑筋急转弯,但想法确实很新奇,突破了思维定式.

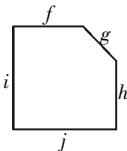


图1

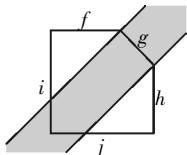


图2

其实在平时教学中经常会遇到一些所谓的“粗”直线,本文通过研究教学过程中遇到的类似问题来一起感受“粗”直线的魅力!

例1: 若不等式 $0 \leq x^2 - ax + a \leq 1$ 有唯一解,则 a 的值为_____.

表面上平淡无奇,不过就是两个一元二次不等式的交集问题,实际上仔细思考,此题可以化归为一条“粗”直线 $0 \leq y \leq 1$ 和函数 $y = x^2 - ax + a$ 的交点个数问题.当“粗”直线的上沿与二次函数相切时,恰有一个交点,即不等式有唯一解.如图3所示.

略解: $x^2 - ax + a = 1$ 有且只有一个根, $x^2 - ax + a - 1 = 0, \Delta = a^2 - 4(a - 1) = 0$, 解得 $a = 2$.

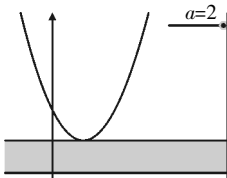


图3

例2: (2011江苏卷第14题) 设集合 $A = \left\{ (x, y) \mid \frac{m}{2} \leq (x-2)^2 + y^2 \leq m^2, x, y \in \mathbf{R} \right\}$, $B = \{ (x, y) \mid 2m \leq x+y \leq 2m+1, x, y \in \mathbf{R} \}$, 若 $A \cap B \neq \emptyset$, 则实数 m 的取值范围是_____.

为保证 $A \cap B \neq \emptyset$, 则首先保证 A 和 B 都不空, 集合 A 中 $\frac{m}{2} \leq m^2$, 则 $m \leq 0$ 或 $m \geq \frac{1}{2}$, 集合 B 不空.

通过分析,可以发现集合 B 表示夹在直线 $l_1: x+y=2m+1$ 和直线 $l_2: x+y=2m$ 之间的条形区域,它的图像可以看成是一条“粗”直线.

下面就 $m \leq 0$ 或 $m \geq \frac{1}{2}$ 分两种情况来观察:

① $m \geq \frac{1}{2}$, 集合 A 中的不等式表示的图像可以看成是一个圆环,如图4;

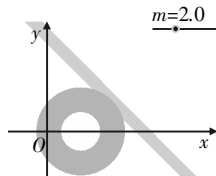


图4

② $m \leq 0$, 集合 A 中的不等式表示的图像可以看成是一个圆面,如图5.

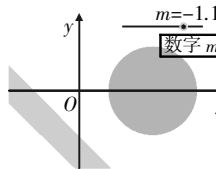


图5

因为 $A \cap B \neq \emptyset$, 所以无论是圆环或是圆面,都只需要保证:

圆心到“粗”直线的上沿 $y = -x + 2m + 1$ 的距离 $d_1 \leq$ 大圆半径 $|m|$;

或圆心到“粗”直线的下沿 $y = -x + 2m$ 的距离 $d_2 \leq$ 大圆半径 $|m|$.

因为 $d_1 = \frac{|2-2m-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} \leq |m|$ 或 $d_2 = \frac{|2-2m|}{\sqrt{1^2+1^2}} \leq |m|$, 所以 $2m^2 - 4m + 1 \leq 0$ 或 $m^2 - 4m + 2 \leq 0$, 所以 $1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \leq m \leq 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(下转第82页)

作者简介: 朱亮亮(1978-),本科学历,中小学高级教师,从事高中数学教学工作,现为昆山市学科带头人.

别为 k_1, k_2 和 k_3 , 则当 $AM \parallel BN$ 时, $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} =$

$\frac{2tk_3}{p(1-mk_3)}$ 恒成立.

结论2: 在平面直角坐标系 xOy 中, O 是坐标原点, P 是直线 $x=my+t$ 上的动点, 过 P 作两条相异直线 l_1 和 l_2 , 其中 l_1 与抛物线 $C: y^2=2px (p>0)$ 交于 A, B 两点, l_2 与 C 交于 M, N 两点, 记 l_1, l_2 和直线 OP 的斜率分别为 k_1, k_2 和 k_3 , 则当 $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{2tk_3}{p(1-mk_3)}$ 恒成立时, $AM \parallel BN$.

结论3: 在平面直角坐标系 xOy 中, O 是坐标原点, 过 P 作两条相异直线 l_1 和 l_2 , 其中 l_1 与抛物线 $C: y^2=2px (p>0)$ 交于 A, B 两点, l_2 与 C 交于 M, N 两点, 记 l_1, l_2 和直线 OP 的斜率分别为 k_1, k_2 和 k_3 , 则当 $AM \parallel BN$, 且 $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{ak_3}{1-bk_3} (a, b \text{ 为常数, 且 } a \neq 0)$ 恒成立时, 点 P 在直线 $2x-2by-pa=0$ 上.

通过对该题解法的剖析, 我们得到了处理此类问题的几种巧妙新颖的方法, 并对问题进行了拓展, 得到了几个优美的结论. 椭圆和双曲线中是否也有类似的结论? 有兴趣的读者可以尝试一下, 不再赘述.

解题反思

解析几何是高中数学的主干知识之一, 承载着落实和提升直观想象、数学运算、逻辑推理等核心素养的功能, 是高考的必考内容. 学好解析几何, 必须过三关, 即“审题关”“翻译关”“运算关”. 其中, “翻译”非常关键. 我们知道, 解析几何的基本思想是把几何问题代数化, 即根据对几何图形的分析, 用代数语言把几何问题转化(即“翻译”)为代数问题, 运用代数方法得到结论, 那么选择何种工具进行翻译就显得尤为重要了, 合理的翻译, 不仅可以大大简化运算, 还可

以产生一些新颖独特的解法, 通过上述几种解法的对比可见一斑.

在平时的教学中, 教师要注重引导学生进行“自觉分析”^[2], 即对解题过程进行自觉反思, 使理解进入深层结构, 通过分析“怎样解题”而领悟“怎样学会解题”, 不仅要反思计算是否准确、推理是否合理、解法是否还有更多更简单的途径、能否进行相应的引申和拓展等, 还要提炼怎样解题和怎样学会解题的理论启示, 进而形成并强化新的认知结构, 达到完善解法、优化过程、陈题新解、难题简解、一题多解、多题归一等效果, 不断提高学生的创新意识、科学精神和思维品质.

参考文献:

- [1] 刘诗熊. 奥数教程[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2016.
- [2] 罗增儒. 数学解题学引论[M]. 西安: 陕西师范大学出版社, 2016.

(上接第 65 页)

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $2-\sqrt{2} \leq m \leq 2+\sqrt{2}$ (特别注

意: 并集), 所以 $1-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq m \leq 2+\sqrt{2}$.

又因为 $m \leq 0$ 或 $m \geq \frac{1}{2}$, 所以 $\frac{1}{2} \leq m \leq 2+\sqrt{2}$.

通过上述例题, 我们发现, 关于“粗”直线的基本形态实际为夹在两条直线之间的条形区域, 表达形式形如: $m \leq ax+by \leq n$ 等.

例3: (2018南京三模第14题) 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, e 为自然对数的底数, 若存在 $b \in [-3e, -e^2]$, 使得函数 $f(x)=e^x-ax-b$ 在 $[1, 3]$ 上存在零点, 则 a 的取值范围为_____.

分析: 首先我们把本题分解成以下几点来思考:

①函数 $f(x)=e^x-ax-b$ 在 $[1, 3]$ 上存在零点, 可以看成 $e^x-ax-b=0$ 在 $[1, 3]$ 上有解, 即 $e^x=ax+b$ 在 $[1, 3]$ 上有解, 也即 $y=e^x$ 和 $y=ax+b$ 有交点;

② $y=e^x$ 在 $[1, 3]$ 上的图像没问题;

③ $y=ax+b$ 随 b 的变化图像为夹在 $y=ax-e^2$ 和 $y=ax-3e$ 之间的带形区域: $e^2 \leq$

$ax-y \leq 3e$, 即一条“粗”直线;

④存在 $b \in [-3e, -e^2]$ 即这条“粗”直线中的有一条直线和 $y=e^x$ 有交点即可.

显然, 当 $a < 0$ 时, 不满足题意.

故当 $a > 0$ 时, 通过GeoGebra制作的图像, 并通过滑动条, 使得 a 不断增大, “粗”直线逐渐接近 $y=e^x$ 在 $[1, 3]$ 上的图像, 然后相切, 此时, “粗”直线的上沿($y=ax-e^2$)与曲线相切(如图6);

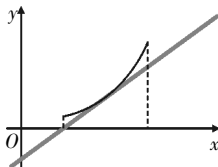


图6

随后相交, “粗”直线的下沿($y=ax-3e$)与 $y=e^x$ 交于点 $(3, e^3)$ (如图7);

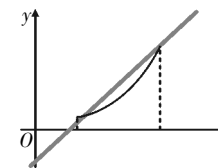


图7

随着 a 的进一步增大, 当“粗”直线的下沿($y=ax-3e$)与 $y=e^x$ 交于点 $(1, e)$ 时(如图8), “粗”直线开始不再与曲线有交点.

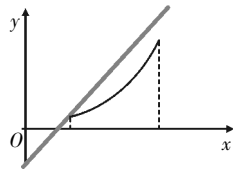


图8

至此 a 的取值范围从 $y=ax-e^2$ 与曲线相切开始到 $y=ax-3e$ 与曲线交于点 $(1, e)$ 结束, 思路清晰明了, 层次鲜明, 难题迎刃而解.

具体操作如下:

(如图6)令切点为 (t, e^t) , 则切线方程为 $y-e^t=e^t(x-t)$, 过 $(0, -e^2)$, 解得 $t=2$, 此时直线斜率 $a=e^2$; (如图8)“粗”直线的下沿 $y=ax-3e$ 过 $(1, e)$ 解得 $a=4e$, 故 $e^2 \leq a \leq 4e$.

实际解题中, 因画图的局限性, 须比较过 $(3, e^3)$ 和过 $(1, e)$ 时的 a 值大小, 此处不再详解.

解题教学是高中数学课尤其是高三教学非常重要的一部分, 我们不应以解题为最终目的, 而是多注重培养学生知识迁移能力及问题解决能力, 在教学过程中促使学生多发现一些美丽的事物、有趣的思想, 既能提高学生的学习兴趣, 也拓展了学生的创造性思维.