

江苏省仪征中学 2020 届高三年级第一学期 B 版午间 “3+1” (36)

2019 年 12 月 2

班级_____姓名_____学号_____评价_____

请将填空题答案填在横线上，并将每个题目的解答过程写在题目下方。

1. 若椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的焦点在 x 轴上，过点 (2, 1) 作圆 $x^2 + y^2 = 4$ 的切线，切点分别为

A, B, 直线 AB 恰好经过椭圆的右焦点和上顶点，则椭圆的方程为_____.

2. 已知抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 上一点 $M(1, m)$ ($m > 0$) 到其焦点的距离为 5, 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左顶点为 A, 若双曲线的一条渐近线与直线 AM 平行, 则实数 $a =$ _____.

3. 点 O 为 $\triangle ABC$ 的重心, 且 $OA \perp OB$, $AB = 6$, 则 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$ 的值为_____.

4. 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $g(x) = x^2 - 2x$.

(1) 求 $f(x)$ 在点 $P(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) 若关于 x 的不等式 $f^2(x) + tf(x) > 0$ 有且仅有三个整数解, 求实数 t 的取值范围;

答案:

1. $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{16} = 1$

2. $\frac{1}{9}$

3. 72

4.解: (1) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $f(1) = 0$, 所以 P 点坐标为 $(1, 0)$;

又 $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, $f'(1) = 1$, 则切线方程为 $y - 0 = x - 1$,

所以函数 $f(x)$ 在点 $P(1, f(1))$ 处的切线方程为 $x - y - 1 = 0$3 分

(2) $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} (x > 0)$

x	$(0, e)$	e	$(e, +\infty)$
$f' x$	正	0	负
$f x$	单调增	极大值	单调减

由 $f^2(x) + tf(x) > 0$, 得 $f(x)[f(x) + t] > 0$;

- ① $t > 0$ 时, $f(x) > 0$ 或 $f(x) < -t$, 满足条件的整数解有无数个, 舍;
- ② $t = 0$ 时, $f(x) \neq 0$, 得 $x > 0$ 且 $x \neq 1$, 满足条件的整数解有无数个, 舍;
- ③ $t < 0$ 时, $f(x) < 0$ 或 $f(x) > -t$, 当 $f(x) < 0$ 时, 无整数解;

当 $f(x) > -t$ 时, 不等式有且仅有三个整数解, 又 $f(3) = \frac{\ln 3}{3}$, $f(2) = f(4) = \frac{\ln 2}{2}$,

$$f(5) = \frac{\ln 5}{5}$$

因为 $f(x)$ 在 $(0, e)$ 递增, 在 $(e, +\infty)$ 递减; 所以 $f(5) \leq -t < f(4)$, 即

$\frac{\ln 5}{5} \leq -t < \frac{\ln 2}{2}$, 即 $-\frac{\ln 2}{2} < t \leq -\frac{\ln 5}{5}$; 所以实数 t 的取值范围为

$$-\frac{\ln 2}{2} < t \leq -\frac{\ln 5}{5}. \quad \dots 8 \text{ 分}$$