

沿着命题人的设计意图解高考压轴题





$\ln 2$ 的估算

1 从2014年全国卷压轴题谈起

1.1 试题再现

已知函数 $f(x) = e^x - e^{-x} - 2x$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 设 $g(x) = f(2x) - 4bf(x)$, 当 $x > 0$ 时, $g(x) > 0$, 求 b 的最大值;

(3) 已知 $1.4142 < \sqrt{2} < 1.4143$, 估计 $\ln 2$ 的近似值(精确到0.001).

1.2 试题解答

(1) 函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增;

(2) 注意到 $g(0) = 0$,

$$g'(x) = 2(e^{x_0} + e^{-x_0} - 2)(e^{x_0} + e^{-x_0} + 2 - 2b),$$

易得 $b_{max} = 2$;

(3)由(2)可知当 $b \leq 2$ 时,

$f(2x_0) > 4bf(x_0)$, 即

$$e^{2x_0} - e^{-2x_0} - 4x_0 > 4b(e^{x_0} - e^{-x_0} - 2x_0),$$

所以 $4(2b-1)x_0 > (e^{x_0} - e^{-x_0})[4b - (e^{x_0} + e^{-x_0})]$,

取 $b = 2, x_0 = \ln \sqrt{2}$, 则 $e^{x_0} = \sqrt{2}$,

所以 $x_0 > \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{8}$,

所以 $\ln \sqrt{2} > \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{4}$.

取 $x_0 = \ln \sqrt{2}$, 令 $e^{x_0} + e^{-x_0} + 2 - 2b = 0$,

则 $b = 1 + \frac{3\sqrt{2}}{4}$, 此时 $b > 2$,

因为函数 $g(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减,

所以 $g(x_0) < 0$,

由 $f(2x_0) < 4bf(x_0)$, 即

$$e^{2x_0} - e^{-2x_0} - 4x_0 < 4b(e^{x_0} - e^{-x_0} - 2x_0)$$

可得

$$4(2b-1)x_0 < (e^{x_0} - e^{-x_0})[4b - (e^{x_0} + e^{-x_0})]$$

将 $b = 1 + \frac{3\sqrt{2}}{4}, x_0 = \ln \sqrt{2}$ 代入,

所以 $x_0 < \frac{18 + \sqrt{2}}{56}$,

所以 $\ln \sqrt{2} < \frac{18 + \sqrt{2}}{28}$,

所以 $\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{4} < \ln \sqrt{2} < \frac{18 + \sqrt{2}}{28}$.

所以 $\ln \frac{1+x}{1-x} \approx 0.693$.

1.3 解题反思

本题第(2)问是基于极值点背景命制的恒成立问题，很是精彩， $g(x)$ 的导函数结构也很漂亮(网络上很多解答均严重破坏了结构).第(3)问可以借助第(2)问的结论构建关于 $\ln 2$ 的不等式组，从而对 $\ln 2$ 进行估算.

2 借助泰勒展开式估算 $\ln 2$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + \cdots$$

$$\ln(1-x) = -(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \cdots)$$

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2(x + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots)$$

$$\text{取 } x = \frac{1}{3}, \text{ 则 } \ln \frac{1+x}{1-x} \approx \frac{2}{3} (1 + \frac{1}{27} + \frac{1}{405})$$

$$\text{所以 } \ln \frac{1+x}{1-x} \approx 0.693.$$

3.更多方法

关于 $\ln 2$ 的估算，还有很多精彩的方法，欢迎在留言区留言！