

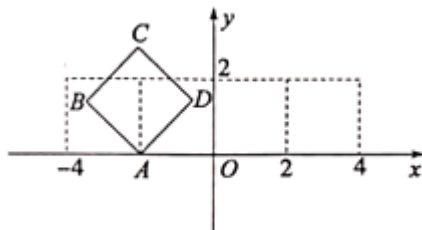
江苏省仪征中学 2020-2021 学年度高三数学寒假自主练习 (6)

一、选择题 (本大题共 8 小题, 共 40.0 分)

- 已知 $A = \{x \mid -1 \leq x < 3\}$, $B = \{0, 2, 4, 6\}$, 则 $A \cap B = ()$
A. $\{0, 2\}$ B. $\{-1, 0, 2\}$ C. $\{x \mid 0 \leq x \leq 2\}$ D. $\{x \mid -1 \leq x \leq 2\}$
- 已知复数 z 满足 $z(1+i) = 3+4i$, 则 $|z| = ()$
A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B. $\frac{5}{4}$ C. $\frac{5}{2}$ D. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$
- 已知 $x \in \mathbb{R}$, 则 “ $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 1$ ” 是 “ $-2 < x < -1$ ” 的 ()
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
- $(2 - \sqrt{x})^8$ 展开式中 x^4 项的系数为 ()
A. 16 B. 1 C. 8 D. 2
- 已知向量 $\vec{a} = (x, 2)$, $\vec{b} = (2, y)$, $\vec{c} = (2, -4)$, 且 $\vec{a} \parallel \vec{c}$, $\vec{b} \perp \vec{c}$, 则 $|\vec{a} - \vec{b}| = ()$
A. 3 B. $\sqrt{10}$ C. $\sqrt{11}$ D. $2\sqrt{3}$
- 已知抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 准线为 l , P 为该抛物线上一点, $PA \perp l$, A 为垂足. 若直线 AF 的斜率为 $-\sqrt{3}$, 则 $\triangle PAF$ 的面积为 ()
A. $2\sqrt{3}$ B. $4\sqrt{3}$ C. 8 D. $8\sqrt{3}$
- 已知 $\left(\frac{1}{3}\right)^a = \log_3 a$, $3^b = \log_{\frac{1}{3}} b$, $\left(\frac{1}{3}\right)^c = \log_{\frac{1}{3}} c$, 则 a, b, c 的大小关系是 ()
A. $c < b < a$ B. $a < b < c$ C. $b < c < a$ D. $b < a < c$
- 已知函数 $f(x) = 2\sin(2x + \varphi)$ 的图象过点 $A\left(\frac{\pi}{6}, 2\right)$, 则 ()
A. 把 $y = f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位得到函数 $y = 2\sin 2x$ 的图象
B. 函数 $f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 上单调递减
C. 函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 内有五个零点
D. 函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ 上的最小值为 1

二、多项选择题 (本大题共 4 小题, 共 20.0 分)

- 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1(-5, 0)$, $F_2(5, 0)$, 则能使双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 的是 ()
A. 离心率为 $\frac{5}{4}$ B. 双曲线过点 $\left(5, \frac{9}{4}\right)$ C. 渐近线方程为 $3x \pm 4y = 0$ D. 实轴长为 4
- 已知菱形 $ABCD$ 中, $\angle BAD = 60^\circ$, AC 与 BD 相交于点 O . 将 $\triangle ABD$ 沿 BD 折起, 使顶点 A 至点 M , 在折起的过程中, 下列结论正确的是 ()
A. $BD \perp CM$ B. 存在一个位置, 使 $\triangle CDM$ 为等边三角形
C. DM 与 BC 不可能垂直 D. 直线 DM 与平面 BCD 所成的角的最大值为 60°
- 已知定义在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上的函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 且 $f(0) = 0$, $f'(x)\cos x + f(x)\sin x < 0$, 则下列判断中正确的是 ()
A. $f\left(\frac{\pi}{6}\right) < \frac{\sqrt{6}}{2}f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ B. $f\left(\ln \frac{\pi}{3}\right) > 0$ C. $f\left(\frac{\pi}{6}\right) > \sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ D. $f\left(\frac{\pi}{4}\right) > \sqrt{2}f\left(\frac{\pi}{3}\right)$
- 在平面直角坐标系 xOy 中, 如图放置的边长为 2 的正方形 $ABCD$ 沿 x 轴滚动 (无滑动滚动), 点 D 恰好经过坐标原点, 设顶点 $B(x, y)$ 的轨迹方程是 $y = f(x)$, 则对函数 $y = f(x)$ 的判断正确的是 ()
A. 函数 $y = f(x)$ 是奇函数
B. 对任意的 $x \in \mathbb{R}$, 都有 $f(x+4) = f(x-4)$
C. 函数 $y = f(x)$ 的值域为 $[0, 2\sqrt{2}]$
D. 函数 $y = f(x)$ 在区间 $[6, 8]$ 上单调递增



三、填空题（本大题共 4 小题，共 20.0 分）

13. 曲线 $y = (x + 1)e^x$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线的方程为_____.

14. 已知 $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1-\cos2\alpha} = 1$, $\tan(\alpha - \beta) = \frac{1}{3}$, 则 $\tan\beta =$ _____.

15. 在四面体 $S - ABC$ 中, $SA = SB = 2$, 且 $SA \perp SB$, $BC = \sqrt{5}$, $AC = \sqrt{3}$, 则该四面体体积的最大值为_____, 该四面体外接球的表面积为_____.

16. 在平面直角坐标系 xOy 中, A 为直线 $l: y = 3x$ 上在第三象限内的点, $B(-10, 0)$, 以线段 AB 为直径的圆 C (C 为圆心) 与直线 l 相交于另一个点 D , $AB \perp CD$, 则圆 C 的标准方程为_____.

四、解答题（本大题共 6 小题，共 70.0 分）

17. 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别为内角 A, B, C 的对边, 且满 $(b - a)(\sin B + \sin A) = c(\sqrt{3}\sin B - \sin C)$.
(1) 求 A 的大小;

(2) 再在 ① $a = 2$, ② $B = \frac{\pi}{4}$, ③ $c = \sqrt{3}b$ 这三个条件中, 选出两个使 $\triangle ABC$ 唯一确定的条件补充在下面的问题中, 并解答问题. 若_____, _____, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

18. 已知数列 $\{a_n\}$ 为公差为 0 的等差数列, 且 $a_2 = 3$, a_1, a_2, a_5 成等比数列.

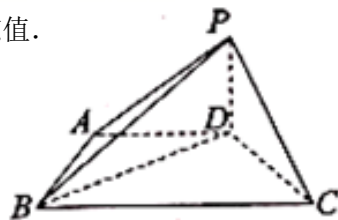
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 S_n 为数列 $\{a_n + 2\}$ 的前 n 项和, $b_n = \frac{1}{S_n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. 如图, 在四棱锥 $P - ABCD$ 中, $PD \perp$ 底面 $ABCD$, $AD \parallel BC$, $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle BCD = 45^\circ$, $BC = 2AD$.

(1) 求证: $BD \perp PC$;

(2) 若 $PC = BC$, 求平面 PAD 和平面 PBC 所成的角(锐角)的余弦值.



20. 近年，国家逐步推行全新的高考制度.新高考不再分文理科，某省采用3 + 3模式，其中语文、数学、外语三科为必考科目，每门科目满分均为 150 分.另外考生还要依据想考取的高校及专业的要求，结合自己的兴趣爱好等因素，在思想政治、历史、地理、物理、化学、生物 6 门科目中自选 3 门参加考试(6选3)，每门科目满分均为 100 分.为了应对新高考，某高中从高一年级 1000 名学生(其中男生 550 人，女生 450 人)中，采用分层抽样的方法从中抽取 n 名学生进行调查，其中，女生抽取 45 人.

- (1)求 n 的值；
 (2)学校计划在高一上学期开设选修中的“物理”和“地理”两个科目，为了了解学生对这两个科目的选课情况，对抽取到的 n 名学生进行问卷调查(假定每名学生在“物理”和“地理”这两个科目中必须选择一个科目且只能选择一个科目)，下表是根据调查结果得到的一个不完整的 2×2 列联表，请将下面的 2×2 列联表补充完整，并判断是否有99%的把握认为选择科目与性别有关？说明你的理由；

	选择“物理”	选择“地理”	总计
男生		10	
女生	25		
总计			

(3)在抽取到的 45 名女生中，按(2)中的选课情况进行分层抽样，从中抽出 9 名女生，再从这 9 名女生中抽取 4 人，设这 4 人中选择“物理”的人数为 X ，求 X 的分布列及期望.附： $K^2 =$

$$\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(a+c)(c+d)(b+d)}, n = a + b + c + d$$

$P(K^2 \geq k_0)$	0.05	0.01	0.005	0.001
k_0	3.841	6.635	7.879	10.828

21. 已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2 ，直线 $y=\frac{3}{2}x$ 与椭圆 E 在第一象限内的交点是 M ，且 $MF_2 \perp x$ 轴， $\vec{MF_1} \cdot \vec{MF_2} = \frac{9}{4}$.

- (1)求椭圆 E 的方程；
 (2)是否存在斜率为-1的直线 l 与以线段 F_1F_2 为直径的圆相交于 A,B 两点，与椭圆 E 相交于 C,D 两点，且 $|CD| \cdot |AB| = \frac{12\sqrt{13}}{7}$? 若存在，求出直线 l 的方程；若不存在，说明理由.

22. 已知函数 $f(x) = e^x(1 + m\ln x)$, 其中 $m > 0$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数, 设 $h(x) = \frac{f'(x)}{e^x}$, 且 $h(x) \geq \frac{5}{2}$ 恒成立.

(1) 求 m 的取值范围;

(2) 设函数 $f(x)$ 的零点为 x_0 , 函数 $f'(x)$ 的极小值点为 x_1 , 求证: $x_0 > x_1$.