2021 届高三年级第二学期开学初调研考试

数学参考答案

一、单项选择题（本大题共 8 个小题，每小题 5 分，共 40 分）

1. D　2. A　3. C　4. B　5. C　6. A　7. D　8. B

二、多项选择题（全选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分）

9. AC　10. BC　11. ABD　12. BCD

三、填空题（本大题共 4 个小题，每小题 5 分，共 20 分，把正确答案填在题中横线上）

13. $-\frac{1}{4}$　14. 0.496　15. $\cos\pi x$（常数函数也可，答案不唯一）16.（2，2）$y^2=8x$

四、解答题（本大题共 6 个小题，共 70 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17. 解：（1）选择①，设公差为 d，

由 $S_8=72,a_3=6$ 得，所以 $\begin{cases}8a_1+28d=72\\ a_1+2d=6\end{cases}$，

解得 $\begin{cases}a_1=2\\ d=2\end{cases}$，所以 $a_n=2n$，　……………………………………………5 分

又因为 $b_n=2^{a_n}$，所以 $b_n=2^{2n}=4^n$，

$a_n+b_n=2n+4^n$，　所以

$T_n=2(1+2+\cdots+n)+4^1+4^2+\cdots+4^n=n(n+1)+\dfrac{4\left(1-4^n\right)}{1-4}$　……………10 分

$=\dfrac{4}{3}\left(4^n-1\right)+n(n+1)=\dfrac{4^{n+1}}{3}+n^2+n-\dfrac{4}{3}.$

（2）选择②，设公差为 d，

因为 $S_5=6a_2$，所以可得 $5a_3=6a_2$

又因为 $a_3=6$，所以 $a_2=5$，所以 $d=1$，所以 $a_n=n+3$．　………………………… 5 分

又因为 $b_n=2^{a_n}$，所以 $b_n=2^{n+3}=8\times2^n$，

所以 $a_n+b_n=8\cdot2^n+n+3$，

$T_n=8\left(2^1+2^2+\cdots+2^n\right)+(1+2+\cdots+n)+3n=8\times\dfrac{2\left(1-2^n\right)}{1-2}+\dfrac{n(n+1)}{2}+3n$　…10 分

$=16\left(2^n-1\right)+\dfrac{n(n+1)}{2}+3n=2^{n+4}+\dfrac{1}{2}n^2+\dfrac{7}{2}n-16.$

（3）选择③，设公差为 d，

因为 $S_6=S_4+a_5$，可得 $S_6-S_4=a_5$，即 $a_6+a_5=a_5$，所以 $a_6=0$，

又因为 $a_3=6$，所以 $d=-2$．所以 $a_n=-2n+12$．　……………………………………5 分

又因为$b_n = 2^{a_n}$，所以$b_n = 2^{-2n+12} = 2^{12} \times 2^{-2n}$，

$T_n = -2(1+2+\cdots n) + 12n + 2^{12} \times (4^{-1}+4^{-2}+\cdots+4^{-n}) = -n(n+1) + 12n + 2^{12} \times (\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{4^n})$

$=\frac{2^{12}}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]-n^2+11n.$ ……………………………………………………10 分

18．(1)解法一：由已知及正弦定理，得$\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\cos C}{\sin C}=\frac{1}{\sin B}$

因为$\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\cos C}{\sin C}=\frac{\cos A\sin C+\cos C\sin A}{\sin A\sin C}=\frac{\sin(A+C)}{\sin A\sin c}=\frac{\sin B}{\sin A\sin c}$

所以$\frac{\sin B}{\sin A\sin c}=\frac{1}{\sin B}, \sin^2 B=\sin A\sin C$

由正弦定理得 $b^2=ac$，即 $ac=4$． $a+c\geq 2\sqrt{ac}=4.$ ……………………………………………6 分

解法二：由已知及余弦定理，得$\frac{b^2+c^2-a}{2abc}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2abc}=\frac{1}{2}$，得 $ac=2b=4$，

所以$a+c\geq 2\sqrt{ac}=4.$

(2) 因为$\triangle ABC$的周长为$2+3\sqrt{2}$，所以$a+c=3\sqrt{2}$,

因为$b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos B=(a+c)^2-2ac-2ac\cdot\cos B$

又因为$ac=4$，所以$\cos B=\frac{3}{4}$得$\sin B=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=2\sin B=\frac{\sqrt{7}}{2}$. ……………………………………………12 分

19．解：（1）由表中数据知，$\bar{x}=3, \bar{y}=100$，

所以$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}=\frac{1410-1500}{55-45}=-9$，……………………………………………………3 分

所以$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=127$，故所求回归直线方程为$\hat{y}=-9x+127$ ……………………6 分

（2）由（1）知，令$x=9$，则$\hat{y}=-9\times 9+127=46$. 人. ……………………………8 分

（3）提出假设H_0："礼让行人"行为与驾龄无关，

由表中数据得$K^2=\frac{70(24\times 14-16\times 16)^2}{40\times 30\times 40\times 30}=\frac{14}{45}\approx 0.311<2.706$，…………………11 分

根据统计知，没有97.5%的把握认为"礼让行人"行为与驾龄有关．…………………12 分

20．解：（1）取AC中点O，因为$PA=PC=AC=2$，所以$PO\perp AC$，且$PO=2\sqrt{3}$.．

连结OB，因为$AB=BC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}AC$，所以$\triangle ABC$为等腰直角三角形，

且$OB\perp AC$，$OB=\dfrac{1}{2}AC=2$．

由$OP^2+OB^2=PB^2$知$PO\perp OB$． ……………………………………………2 分

由$OP\perp OB,OP\perp AC$知$PO\perp$平面ABC．

又$PO\subset$平面PAC，所以平面$PAC\perp$平面ABC． ………………………………4 分

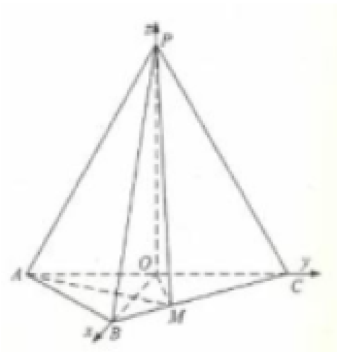
如图，以O为坐标原点，$\overrightarrow{OB}$的方向为x轴正方向，

建立空间直角坐标系$O-xyz$．

由已知得$O(0,0,0),B(2,0,0),A(0,-2,0),C(0,2,0),P(0,0,2\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AP}=(0,2,2\sqrt{3})$，

设$M(a,2-a,0)(0\le a\le 2)$，则$\overrightarrow{AM}=(a,4-a,0)$． ……………………………6 分

设平面PAM的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，



由$\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}=0,\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$得$\begin{cases}y+\sqrt{3}z=0\\ax+(4-a)y=0\end{cases}$，

取$\vec{n}=(\sqrt{3}(a-4),\sqrt{3}a,-a)$ ……………………………8 分

设PC与平面PAM所成角为α，

又$\overrightarrow{PC}=(0,2,-2\sqrt{3})$，

则$\sin\alpha=|\cos<\overrightarrow{PC},\hat{n}>|=\dfrac{4\sqrt{3}a}{4\sqrt{3(a-4)^2+3a^2+a^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，

所以$3a^2+8a-16=0.$ ……………………………………………………………10 分

所以$a=\dfrac{4}{3}$（舍负），所以$MC=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}.$ …………………………………… 12 分

21．解：（1）因为过椭圆E的左、右焦点倾斜角为$\dfrac{\pi}{3}$的两条直线间的距离为$\sqrt{3}$．

所以$\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2c}$，所以$c=1$，

又因为椭圆的离心率为$\dfrac{1}{2}$，所以$a=2$，所以$b=\sqrt{3}$

椭圆E的标准方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$； ………………………………… 4 分

（2）设$A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，直线l：$x=my+1$，则$Q(x_1,-y_1)$

因为直线l与坐标轴不垂直，所以直线QB：$y+y_1=\dfrac{y_1+y_2}{x_2-x_1}(x-x_1)$

所以$y=\dfrac{y_1+y_2}{x_2-x_1}x-\dfrac{x_2y_1+x_1y_2}{x_2-x_1}=\dfrac{y_1+y_2}{m(y_2-y_1)}x-\dfrac{2my_1y_2+y_1+y_2}{m(y_2-y_1)}$， ……………6 分

由$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\\ x=my+1\end{cases}$，得$(3m^2+4)y^2+6my-9=0$，

所以$y_1+y_2=-\dfrac{6m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=-\dfrac{9}{3m^2+4}$ ……………………………………9分

所以$y=-\dfrac{6}{(3m^2+4)(y_2-y_1)}(x-4)$， ……………………………………………11分

所以直线直线QB过定点$(4,0)$ ……………………………………………………12分

22.解：（1）令$F(x)=f(x)-g(x)=e^x-1+\sin x$，所以$F'(x)=e^x+\cos x$

当$x\in(0,+\infty)$时，$e^x>1$，$\cos x\le 1$，所以$F'(x)>0$.

所以$F(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增. ………………2分

又$x\in[0,+\infty)$，所以$F(x)\ge F(0)=0$，

$\therefore f(x)\geqslant g(x)$在$x\in[0,+\infty)$上恒成立. ………………4分

（2）$\varphi(x)=e^x-1-a\sin x(a\in R)$.所以$\varphi'(x)=e^x-a\cos x$，

设$h(x)=\varphi'(x)$，$h'(x)=e^x+a\sin x$，

①当$a\leqslant 0$时，因为$x\in[0,\pi]$，所以$-a\sin x\ge 0$，而$e^x-1\ge 0$，

所以$e^x-1-a\sin x\ge 0$，即$\varphi(x)\geqslant 0$恒成立，所以$\varphi(x)$零点个数为1个。 …………6分

② 当 $0<a\le 1$ 时， $h'(x)=e^x+a\sin x\ge 0$ ， 所 以 $\varphi'(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上 递 增 ， 而 $\varphi'(0)=1-a\ge 0$，所以$\varphi'(x)\ge\varphi'(0)=0$，所以$\varphi(x)$在$[0,\pi]$上递增，

因为$\varphi(0)=0$，所以$x=0$是唯一零点，此时$\varphi(x)$零点个数为1个。 ……………………8分

③当$a>1$时，$h'(x)=e^x+a\sin x\ge 0$，所以$\varphi'(x)$在$[0,\pi]$上递增，而$\varphi'(0)=1-a<0$，

$\varphi'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}>0$，所以存在$x_0\in[0,\pi]$，有$\varphi'(x_0)=0$，

所以当$0<x<x_0$时，$\varphi(x)$单调递减，当$x_0<x<\pi$时，$\varphi(x)$单调递增，

所以当$x=x_0$时，$\varphi(x)$取得最小值$\varphi(x_0)$，而$\varphi(x_0)<\varphi(0)=0$，$\varphi(\pi)=e^\pi-1>0$，

又因为$\varphi(x)$图象是连续不间断的，由零点存在性定理知，

$\varphi(x)$在(x_0,π)上有唯一零点，又因为$x=0$也是零点，

所以$\varphi(x)$在$[0,\pi]$上有2个零点.

综上：当$a\le 1$时，$\varphi(x)$在$[0,\pi]$上有1个零点；

当$a>1$时，$\varphi(x)$在$[0,\pi]$上有2个零点. ……………………………………12分