

江苏省仪征中学 2021—2022 学年度第一学期午间练 6

学校: _____ 姓名: _____ 班级: _____ 考号: _____

一、单选题 (本大题共 2 小题, 共 10.0 分)

1. 已知集合 $A = \{x \in \mathbb{Z} | -1 < x < 4\}$, 则集合 A 的非空子集个数是()
A. 7 B. 8 C. 15 D. 16
2. 若不等式 $mx^2 + 2mx - 2 < 0$ 对一切实数 x 都成立, 则实数 m 的取值范围为()
A. $(-2, 0)$ B. $(-2, 0]$ C. $(-\infty, 0)$ D. $(-\infty, 0]$

二、多选题 (本大题共 1 小题, 共 5.0 分)

3. 下列说法正确的有()
A. 若 $a > b$, 那么 $\frac{1}{a^3} < \frac{1}{b^3}$
B. 若 $a < b < 0$, 则 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$
C. 若 $x > 0$, 则 $x + \frac{4}{x+2}$ 有最小值 2
D. 若 $x \in \mathbb{R}$, 则 $\frac{2x}{x^2+1}$ 有最大值 1

三、单空题 (本大题共 2 小题, 共 10.0 分)

4. 不等式 $ax^2 + 4x + a > 1 - 2x^2$ 对一切 $x \in \mathbb{R}$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是_____.
5. 若 " $\frac{1}{2} < x < 3$ " 是 " $0 \leq x \leq m$ " 的充分不必要条件, 则实数 m 的取值范围是_____.

四、解答题 (本大题共 1 小题, 共 12.0 分)

6. 选用恰当的证明方法, 证明下列不等式.

(1) 已知 $2 < a - b < 3$, $4 \leq a + b \leq 7$, 求 $3a - 2b$ 的取值范围;

(2) 已知 a, b 为正数, 且 $a + b = 1$, 求证: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 4$.

间练 6 答案

1. 【答案】C

解: $\because$ 集合 $A = \{x \in \mathbb{Z} | -1 < x < 4\} = \{0, 1, 2, 3\}$,

$\therefore$ 集合 A 的非空子集个数为: $2^4 - 1 = 15$.

2. 【答案】B

解: ① $m = 0$ 时, $-2 < 0$ 恒成立; ② $m < 0$, $\Delta = (2m)^2 + 8m < 0$, 解得 $-2 < m < 0$

综上, $-2 < m \leq 0$,

3. 【答案】BD

解: 对于 A , 举反例: $a = 1, b = -1$, $\frac{1}{a^3} > \frac{1}{b^3}$, A 不正确; 对于 B , 由 $a < b < 0$, 由不

等式的性质, 有 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, B 正确; 对于 C , $x + \frac{4}{x+2} = (x+2) + \frac{4}{x+2} - 2 \geq 2\sqrt{(x+2) \cdot \frac{4}{x+2}} - 2 =$

2, 当且仅当 $x+2 = \frac{4}{x+2}$ 即 $x = 0$ 时取等号, 但是 x 取不到 0, 故等号不成立, C 不正确;

对于 D , 若 $x \leq 0$, 则 $\frac{2x}{x^2+1} \leq 0$, 若 $x > 0$, 由 $x^2 + 1 \geq 2x$, 当且仅当 $x = 1$ 时取得等号,

则 $0 < \frac{2x}{x^2+1} \leq 1$, 则 $\frac{2x}{x^2+1}$ 有最大值 1, D 正确.

4. 【答案】(2, +\infty)

解: 不等式 $ax^2 + 4x + a > 1 - 2x^2$ 对一切 $x \in \mathbb{R}$ 恒成立, 即 $(a+2)x^2 + 4x + a - 1 > 0$

对一切 $x \in \mathbb{R}$ 恒成立, 若 $a+2 = 0$, 显然不成立,

若 $a+2 \neq 0$, 则 $\begin{cases} a+2 > 0 \\ \Delta = 16 - 4(a+2)(a-1) < 0 \end{cases}$, 解得: $a > 2$.

5. 【答案】[3, +\infty)

解: 因为 " $\frac{1}{2} < x < 3$ " 是 " $0 \leq x \leq m$ " 的充分不必要条件, 所以集合 $A = \{x | \frac{1}{2} < x <$

$3\} \subsetneq B = \{x | 0 \leq x \leq m\}$. 所以 $m \geq 3$.

6. 【答案】

(1) 解: $3a - 2b = \frac{5}{2}(a-b) + \frac{1}{2}(a+b)$, 因为 $2 < a-b < 3$, 所以 $5 < \frac{5}{2}(a-b) < \frac{15}{2}$,

又 $4 \leq a+b \leq 7$, 所以 $2 \leq \frac{1}{2}(a+b) \leq \frac{7}{2}$, 所以 $3a - 2b = \frac{5}{2}(a-b) + \frac{1}{2}(a+b) \in (7, 11)$.

(2) 证明: 因为 a, b 为正数, 且 $a+b=1$,

$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = (\frac{1}{a} + \frac{1}{b})(a+b) = 2 + \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2 + 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} = 4$, 当且仅当 $\frac{b}{a} = \frac{a}{b}$ 即 $a=b=\frac{1}{2}$ 时取等号.