

函数章节起始课

(一) 数学概念是如何建立的？

(二) 为什么要建立数学概念？

(三) 函数有什么样的特征？如何用函数模型解释、阐述我们的世界？

(一) 数学概念是如何建立的？

工作单 1：函数概念的第一次抽象认识.

案例 1 圆的面积 S 与圆半径 r 的关系.

案例 2 锐角 α 与锐角 β 互余， α 与 β 的关系.

案例 3 气体的质量一定时，它的体积 V 与它的密度 ρ 之间的关系.

思考 1：上述的每个问题在变化过程中，谁是常量，谁是变量？都涉及几个变量？

思考 2：两个变量之间的关系是通过什么来刻画的？

思考 3：综合思考 1 和思考 2 的解答，总结上述例子中变量间关系的共同特点？

1718 年约翰·伯努利 对函数概念进行了明确定义：

由任一变量和常数的任一形式所构成的量（是历史上第一个正式发表的确切 的函数定义）.

欧拉在 《无穷分析引论》 中给出 的函数定义是：

“一个变量的函数是由该变量和一些数或常量以任何方式组成的解析式.”

【说明】这个时期是人们对于函数概念的第一次抽象认识. 主要代表人物为欧拉、伽利略、笛卡儿、约翰·伯努利，主要观点是：函数就是解析式. 但新的问题出现了：并不是所有的函数关系都能用解析式表示. 比如，温度和时刻之间的关系、年份与人口数的关系就不能用解析式表示. 从而引发了人们对函数概念的第二次抽象认识.

工作单 2：函数概念的第二次抽象认识.

案例 4 估计人口数量变化趋势是我国制定一系列相关政策的依据，从人口统计年鉴中可以查得我国从 1949 ~ 1999 年人口数据资料如表 2 所示，根据表格回答下列问题.

表 2：1949 ~ 1999 年我国人口数据表

年份	1949	1954	1959	1964	1969	1974	1979	1984	1989	1994	1999
人口数/百万	542	603	672	705	807	909	975	1 035	1 107	1 177	1 246

思考 1：表格中有变量吗？有几个变量？是什么？

思考 2：当年份确定时，相应年份的人口数是否确定？你能根据表格写出 1949 ~ 1999 年的年份与我国人口数的关系式吗？

案例 5 图 1 为某市一天 24 小时内的气温变化图.

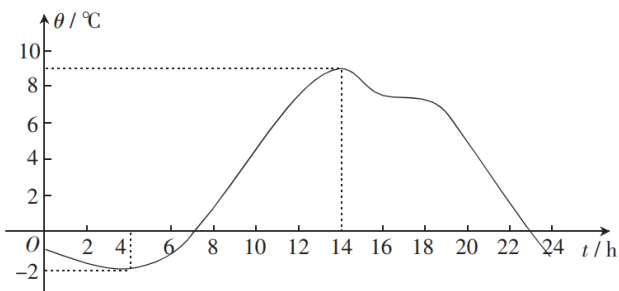


图 1

思考 1：统计图中有变量吗？有几个变量？是什么？

思考 2：当时间确定时，相应的温度是否确定？

你能写出温度随时间变化的关系式吗？

思考 3：综合上述思考题的解答，总结上述例子中变量间关系的共同特点.

欧拉在《微分学原理》的序言中给出 的函数定义是：

如果某个量依赖于另一个量，当后面 这个量变化时，前面这个量也随之变化，则前面这个 量称为后面这个量的函数.

【说明】这个时期是人们对于函数概念的第二次抽象认识. 主要代表人物为欧拉，主要观点是：函数是指两个变量之间具有依赖关系. 但新的问题出现了：并不是所有的函数关系中的变量间都具有依赖关系. 比如计程车路程与费用关系，当路程在起步价范围内，收取费用完全相同，即此段中两个变量之间不具有依赖关系. 从而引发了人们对函数概念的第三次抽象认识.

工作单 3: 函数概念的第三次抽象认识.

案例 6 某市出租汽车的收费标准如下: 在 3 km (含 3 km) 路程内按起步价 11 元收费, 超过 3 km 的路程按 2.4 元 / km 收费. 试问: 某次乘坐出租汽车路程为 1.8 km 和 2.7 km 时, 收费分别是多少? 如果是 4 km 呢?

思考 1: 上述问题有变量吗? 有几个变量? 分别是什么?

思考 2: 上述两个变量是否一定具有依赖关系?

思考 3: 综合上述思考题的解答, 总结上述例子中变量间关系的特点.

1837 年狄利克雷认为怎样去建立 x 与 y 之间的关系无关紧要, 他拓广了函数概念, 指出: “对于在某区间上的每一个确定的 x 值, y 都有一个确定的值, 那么 y 叫做 x 的函数.”

狄利克雷的函数定义, 出色地避免了以往函数定义中所有的关于依赖关系的描述, 简明精确, 以完全清晰的方式为所有数学家无条件地接受.

至此, 我们已可以说, 函数概念、函数的本质定义已经形成, 这就是人们常说的经典函数定义.

【说明】这个时期是人们对于函数概念的第三次抽象认识. 主要代表人物为狄利克雷, 主要观点是: 函数就是两个变量之间的对应关系. 20 世纪, 随着集合语言的出现, 越来越多的分支学科都建立在集合论的基础上, 函数概念也不例外, 从而引发了人们对函数概念的第四次抽象认识.

工作单 4：函数概念的第四次抽象认识.

20 世纪康托尔创立的集合论在数学中占有重要地位之后，集合语言作为近现代数学的“基本语言”广泛在数学各个分支学科中占据着重要地位. 如何利用集合语言描述函数的变量对应说的相关观点，给出基于集合语言的函数定义呢？

思考 1：变量对应说中的两个变量如何用集合语言描述？

思考 2：变量对应说中的变量对应关系如何用集合语言描述？

思考 3：集合对应的本质仍是两非空数集中元素的对应，那么这种对应遵循什么规律？

思考 4：结合上述几个思考题，概括函数的本质属性，并给出函数的概念.

1930 年新的现代函数定义为：

若对集合 M 的任意元素 x ，总有集合 N 确定的元素 y 与之对应，则称在集合 M 上定义一个函数，记为 $y = f(x)$.

元素 x 称为自变元，元素 y 称为因变元.

【说明】这个时期是人们对于函数概念的第四次抽象认识. 至此完成了现代函数概念建构的全过程.

（三）为什么要建立数学概念？

世界上的一切，都在不停地变化。

古希腊哲学家赫拉克利特说：人不能两次踏入同一条河流。

因为河水在流动，第二次踏入的已经不是上次的河流了。赫拉克利特用生动的比喻说明一切都在不断地变化。但他没有把概念说清楚。什么叫同一条河流？昨天的黄河和今天的黄河是一条河还是两条河？早上的你和晚上的你是一个人还是两个人？古人已经感觉到了事物的运动变化和保持相对稳定性质之间的矛盾，但由于尚未找到合理地刻画运动和变化的方法，不能实事求是地认识运动和变化。直到 17 世纪，数学中出现了变量与函数的概念，人们才掌握了精确地描述和刻画运动与变化的工具。

每个数学概念和公式的背后都有它的故事：

或许源于一个灵感；或许是几代人甚至是几个世纪人们共同努力使之完善的过程；或许是中外数学家的一些共同思考。函数概念的定义经过多年的锤炼、变革，形成了函数的现代定义形式，但这并不意味着函数概念发展的历史终结。因此，随着以数学为基础的其他学科的发展，函数的概念还会继续扩展。

正如恩格斯所说：

“数学中的转折点是笛卡尔的变数。

有了变数，运动进入了数学，

有了变数，辩证法进入了数学，

有了变数，微分和积分也就立刻成为必要了。”

（三）函数有什么样的特征？如何用函数模型解释、阐述我们的世界？

1. 研究一个数学对象, 首先必须明确**这个数学对象是什么**？

这是我们本节课已经探究过的内容。

2. 如何分别用数学语言、符号语言、图形语言表示一个函数呢？

3. 澄清基本概念和表示方法之后, 一个核心问题是:**如何研究函数的图像和性质**？

一种比较简单的研究方法是**以图识性**, 作出函数的图像(简图), 通过图像(简图)观察和分析函数的性质(初中大家学习的增减性质就是函数的一种常见性质)。

也可采用第二种方法:**依性作图**。先通过量化的方法研究函数的相关性质, 而后根据性质作出函数的简图。

第二章的 2.2 节介绍了函数的两种常见性质: 单调性和奇偶性的研究方法。

函数的性质有很多, 为什么只重点研究函数的这两个性质呢？

因为这两个性质是函数最为基本的性质, 正如《水浒传》里有 108 将, 但是只对武松、鲁智深、林冲等十几个人着力刻画, 这是文学家的方法, 也是数学家的方法。

4. 基本初等函数的图像和性质

研究了函数的基本性质, 建立了研究函数图像和性质的两条基本路径(以图识性、依性作图)之后, 要尝试自己来动手研究几个具体函数的图像和性质了, 这便是我们即将要研究的教材的第三章内容: 指数函数(3.1 节)、对数函数(3.2 节)、幂函数(3.3 节)。

通过对这三个实体性函数模型的研究, 进一步体会函数图像和性质的基本研究方法, 进一步**形成研究的方法论**。

5. 数学要回归生活。任何事物的出现都会有它存在的正面价值, **函数有什么样的应用呢**? 数学的发展有两条主线, 一条是源于数学内部的发展, 一条是源于现实社会生活的需要。

所以最后一部分内容在阐述函数应用时也同时兼顾了函数在数学内部发展的应用, 也考虑了其在解决现实社会生活中的作用。