

江苏省仪征中学 2020-2021 学年度第一学期高二数学

《圆锥曲线》巩固练习 (4)

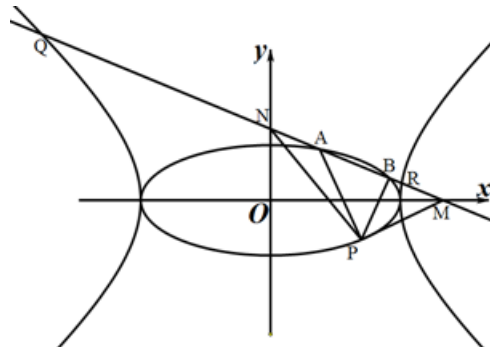
1. 双曲线 $\frac{x^2}{m} - \frac{y^2}{n} = 1 (mn \neq 0)$ 的离心率为 2, 有一个焦点与抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点重合, 则 mn 的值为()
A. $\frac{3}{16}$ B. $\frac{3}{8}$ C. $\frac{16}{3}$ D. $\frac{8}{3}$
2. 设 F 为抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点过 F 且倾斜角为 60° 的直线交抛物线 C 于 A, B 两点, 则 $|AB| = ()$
A. 8 B. $\frac{8}{3}$ C. 16 D. $\frac{16}{3}$
3. 我们把焦点相同, 且离心率互为倒数的椭圆和双曲线称为一对“相关曲线”. 已知 F_1, F_2 是一对相关曲线的焦点, P 是椭圆和双曲线在第一象限的交点, 当 $\angle F_1 P F_2 = 60^\circ$ 时, 这一对相关曲线中椭圆的离心率为()
A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{1}{2}$
4. (多选) 已知椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 不经过原点 O 、斜率为 k 的直线与椭圆相交于 A, B 两点, M 为线段 AB 的中点. 下列结论正确的是()
A. 直线 AB 与 OM 垂直
B. 若点 M 坐标为 $(1, \frac{1}{2})$, 则直线方程为 $x + 2y - 2 = 0$
C. 若直线方程为 $y = x + 1$, 则点 M 坐标为 $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$
D. 若直线方程为 $y = x + 2$, 则 $AB = \frac{4\sqrt{2}}{5}$
5. F_1, F_2 分别是椭圆 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的左右焦点, 过 F_1 作倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$ 的直线与椭圆交于 P, Q 两点, 则 $\Delta F_2 P Q$ 的面积为_____.
6. 已知 F 是双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 的右焦点, P 是双曲线 C 左支上的一点, 且点 A 的坐标为 $(0, 2\sqrt{3})$, 则 $\Delta A P F$ 的周长最小值为_____.

7. 如图, 已知椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 与等轴双曲线 C_2 共顶点 $(\pm 2\sqrt{2}, 0)$, 过椭圆 C_1 上一点 $P(2, -1)$ 作两直线与椭圆 C_1 相交于相异的两点 A, B , 直线 PA, PB 的倾斜角互补. 直线 AB 与 x, y 轴正半轴相交, 分别记交点为 M, N .

(1) 求椭圆 C_1 和双曲线 C_2 的方程;

(2) 若 $\triangle PMN$ 的面积为 $\frac{5}{4}$, 求直线 AB 的方程;

(3) 若 AB 与双曲线 C_2 的左、右两支分别交于 Q, R , 求 $\frac{NQ}{NR}$ 的范围.



江苏省仪征中学 2020-2021 学年度第一学期高二数学

《圆锥曲线》巩固练习 (4)

8. 双曲线 $\frac{x^2}{m} - \frac{y^2}{n} = 1 (mn \neq 0)$ 的离心率为 2, 有一个焦点与抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点重合, 则 mn 的值为()

A. $\frac{3}{16}$ B. $\frac{3}{8}$ C. $\frac{16}{3}$ D. $\frac{8}{3}$

解: 抛物线的焦点为(1,0), 由题意知 $\frac{1}{\sqrt{m}} = 2$. 即 $m = \frac{1}{4}$, 则 $n = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, 从而 $mn = \frac{3}{16}$.

故选 A.

9. 设 F 为抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点过 F 且倾斜角为 60° 的直线交抛物线 C 于 A, B 两点, 则 $|AB| = ()$

A. 8 B. $\frac{8}{3}$ C. 16 D. $\frac{16}{3}$

解: 抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点(1,0), 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, $\therefore F$ 且倾斜角为 60° 的

直线 $y = \sqrt{3}(x - 1)$, $\therefore \begin{cases} y = \sqrt{3}x - \sqrt{3} \\ y^2 = 4x \end{cases}$, 整理得 $3x^2 - 10x + 3 = 0$,

由韦达定理可知 $x_1 + x_2 = \frac{10}{3}$, 由抛物线的定义可知: $|AB| = p + x_1 + x_2 = 2 + \frac{10}{3} =$

$\frac{16}{3}$, 故选: D.

10. 我们把焦点相同, 且离心率互为倒数的椭圆和双曲线称为一对“相关曲线”. 已知

F_1, F_2 是一对相关曲线的焦点, P 是椭圆和双曲线在第一象限的交点, 当

$\angle F_1PF_2 = 60^\circ$ 时, 这一对相关曲线中椭圆的离心率为()

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

解: 设 $F_1P = m, F_2P = n, F_1F_2 = 2c$, 由余弦定理得 $(2c)^2 = m^2 + n^2 - 2mncos60^\circ$,

即 $4c^2 = m^2 + n^2 - mn$, 设 a_1 是椭圆的实半轴, a_2 是双曲线的实半轴,

由椭圆及双曲线定义, 得 $m + n = 2a_1, m - n = 2a_2, \therefore m = a_1 + a_2, n = a_1 - a_2$,

将它们及离心率互为倒数关系代入前式得 $3a_2^2 - 4c^2 + a_1^2 = 0$,

$a_1 = 3a_2, e_1 \cdot e_2 = \frac{c}{a_1} \cdot \frac{c}{a_2} = \frac{c}{a_1} \cdot \frac{3c}{a_1} = 1$ 即 $3e_1^2 = 1 \therefore e_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 故选 A.

11. 已知椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 不经过原点 O 、斜率为 k 的直线与椭圆相交于 A, B 两点,

M 为线段 AB 的中点. 下列结论正确的是()

A. 直线 AB 与 OM 垂直

B. 若点 M 坐标为 $(1, \frac{1}{2})$, 则直线方程为 $x + 2y - 2 = 0$

C. 若直线方程为 $y = x + 1$, 则点 M 坐标为 $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$

D. 若直线方程为 $y = x + 2$, 则 $AB = \frac{4\sqrt{2}}{5}$

解: 因为在椭圆中, 根据椭圆的中点弦的性质 $k_{AB} \cdot k_{OM} = -\frac{b^2}{a^2} = -\frac{1}{4} \neq -1$, 所以 A 项不正确; 根据 $k_{AB} \cdot k_{OM} = -\frac{b^2}{a^2} = -\frac{1}{4}$, 而 $k_{OM} = \frac{1}{2}$, 所以 $k_{AB} = -\frac{1}{2}$, 所以直线方程为 $y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(x - 1)$, 即 $x + 2y - 2 = 0$, 所以 B 项正确; 若直线方程为 $y = x + 1$, 点 $M(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, 则 $k_{AB} \cdot k_{OM} = 1 \cdot (-2) = -2 \neq -\frac{1}{4}$, 所以 C 项不正确; 若直线方程为 $y = x + 2$, 与椭圆方程 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 联立, 得 $x^2 + 4(x + 2)^2 - 4 = 0$, 整理得 $5x^2 + 16x + 12 = 0$, 解得 $x_1 = -2, x_2 = -\frac{6}{5}$, 所以 $AB = \sqrt{1 + 1^2} \times |\frac{4}{5}| = \frac{4\sqrt{2}}{5}$, 所以 D 正确. 故选 BD.

12. F_1, F_2 分别是椭圆 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的左右焦点, 过 F_1 作倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$ 的直线与椭圆交于 P, Q 两点, 则 ΔF_2PQ 的面积为_____.

解: 依题意得, $a = \sqrt{2}, b = 1, c = 1$,

$\therefore F_1(-1, 0)$, 直线 AB 的方程为 $y = x + 1$,

由 $\begin{cases} y = x + 1 \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \end{cases}$ 得 $3y^2 - 2y - 1 = 0$, 方程的解即为 P, Q 两点的纵坐标,

$\therefore y_P = 1, y_Q = -\frac{1}{3}. \therefore S_{\Delta F_2PQ} = \frac{1}{2} |F_1F_2| \cdot |y_P - y_Q| = \frac{1}{2} \times 2c \times |1 + \frac{1}{3}| = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$. 故答案为: $\frac{4}{3}$.

13. 已知 F 是双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 的右焦点, P 是双曲线 C 左支上的一点, 且点 A 的坐标为 $(0, 2\sqrt{3})$, 则 ΔAPF 的周长最小值为_____.

解: 如图,

由双曲线 C 的方程可知 $a^2 = 1, b^2 = 3$,

$\therefore c^2 = a^2 + b^2 = 1 + 3 = 4$,

$\therefore c = 2$, $\therefore$ 左焦点 $E(-2, 0)$, 右焦点 $F(2, 0)$,

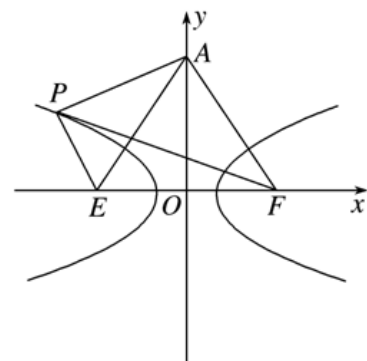
$\therefore |AF| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$, $\therefore$ 当 ΔAPF 的周长最小时,

$|PA| + |PF|$ 最小, 由双曲线的性质得 $|PF| - |PE| = 2a =$

2 , $\therefore |PF| = |PE| + 2$, 又 $|PE| + |PA| \geq |AE| = |AF| = 4$,

当且仅当 A, P, E 三点共线且点 P 在线段 AE 上时, 等号成立,

$\therefore \Delta APF$ 的周长为 $|AF| + |AP| + |PF| = 4 + |PE| + |AP| + 2 \geq 4 + 4 + 2 = 10$.



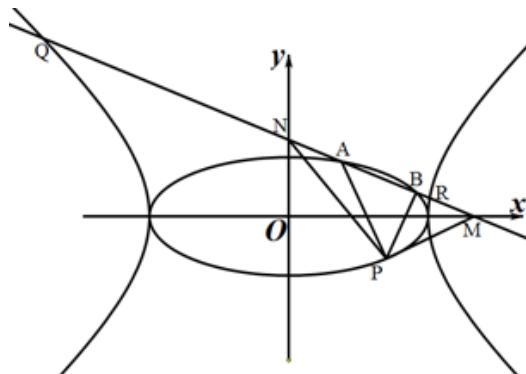
14. 如图, 已知椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 与等轴双曲线 C_2 共顶点 $(\pm 2\sqrt{2}, 0)$, 过椭圆 C_1 上一点 $P(2, -1)$ 作两直线与椭圆 C_1 相交于相异的两点 A, B , 直线 PA, PB 的倾斜角互补. 直线 AB 与 x, y 轴正半轴相交, 分别记交点为 M, N .

(1) 求椭圆 C_1 和双曲线 C_2 的方程;

(2) 若 $\triangle PMN$ 的面积为 $\frac{5}{4}$, 求直线 AB 的方程;

(3) 若 AB 与双曲线 C_2 的左、右两支分别交于

Q, R , 求 $\frac{NQ}{NR}$ 的范围.



解: (1) $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1$;

(2) 由题 $\begin{cases} y + 1 = k(x - 2) \\ x^2 + 4y^2 = 8 \end{cases}$ 消去 y 得: $(4k^2 + 1)x^2 - (16k^2 + 8k)x + 16k^2 + 16k - 4 = 0$,

$x_A \cdot x_P = \frac{16k^2 + 16k - 4}{4k^2 + 1}$, 因为 $x_P = 2$, 所以 $x_A = \frac{8k^2 + 8k - 2}{4k^2 + 1}$, 并求出 $y_A = \frac{4k^2 - 4k - 1}{4k^2 + 1}$,

将 k 换成 $-k$, 得: $B(\frac{8k^2 - 8k - 2}{4k^2 + 1}, \frac{4k^2 + 4k - 1}{4k^2 + 1})$, 则可得 $k_{AB} = -\frac{1}{2}$, 设 $AB: y = -\frac{1}{2}x + n (n > 0)$,

$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + n \\ x^2 + 4y^2 = 8 \end{cases}$ 消去 y 得: $x^2 - 2nx + 2n^2 - 4 = 0$, $\Delta = 4n^2 - 8n^2 + 16 > 0$, 所以得:

$0 < n < 2$, 则 $AB: x + 2y - 2n = 0 (0 < n < 2)$, $M(2n, 0), N(0, n)$, $d = \frac{2n}{\sqrt{5}}$,

$S_{\triangle PMN} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4n^2 + n^2} \cdot \frac{2n}{\sqrt{5}} = n^2 = \frac{5}{4}$, 解得: $n = \frac{\sqrt{5}}{2}$, 即 $AB: x + 2y - \sqrt{5} = 0$;

(3) $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + n (0 < n < 2) \\ x^2 - y^2 = 8 \end{cases}$ 消去 y 得: $3x^2 + 4nx - 4n^2 - 32 = 0$,

$x_{1,2} = \frac{-2n \pm 4\sqrt{n^2 + 6}}{3}$, $\frac{NQ}{NR} = \frac{|x_Q|}{|x_R|} = \frac{n + 2\sqrt{n^2 + 6}}{-n + 2\sqrt{n^2 + 6}} = \frac{2\sqrt{1 + \frac{6}{n^2}} + 1}{2\sqrt{1 + \frac{6}{n^2}} - 1} = 1 + \frac{2}{2\sqrt{1 + \frac{6}{n^2}} - 1}$,

$\because 0 < n^2 < 4$, $\therefore \frac{6}{n^2} > \frac{3}{2}$, 则 $2\sqrt{\frac{6}{n^2} + 1} - 1 > \sqrt{10} - 1$, $\therefore 0 < \frac{2}{2\sqrt{\frac{6}{n^2} + 1} - 1} < \frac{2}{\sqrt{10} - 1}$,

$\therefore 1 < \frac{NQ}{NR} < \frac{11 + 2\sqrt{10}}{9}$, 则 $\frac{NQ}{NR}$ 的取值范围为 $(1, \frac{11 + 2\sqrt{10}}{9})$.