

在“立体几何中的折叠问题”复习课中落实核心素养

吴漫华

(广东省深圳市翠园中学, 518003)

摘要: 本文通过一节“立体几何中的折叠问题”的探究复习课, 探索高三复习课的教学方式, 用问题引导启发学生思考、探索、解决数学问题, 既提高学生的解题能力, 又发展学生的核心素养.

关键词: 高三复习课; 立体几何折叠问题; 数学核心素养

一、问题提出

知识的学习是螺旋上升的, 高三学生已经学习了高中数学的所有知识, 对问题的分析和思考更深入, 这为高三课堂可以花更多的时间在问题的探索、解决、综合提升等更高层次的思维活动奠定了基础. 在高三复习备考中, 刷题讲题常成为课堂教学的主流, 而培养学生解决问题的能力及发展其核心素养常常被忽略. 本文探索一类高三复习课的教学方式, 用问题引导启发学生思考、探索、解决数学问题, 既提高学生的解题能力, 又发展学生的核心素养, 培养学生的学习能力.

二、课例设计构想

在高中数学课程中, 立体几何在发展学生的直观想象与逻辑推理等数学核心素养方面发挥着不可替代的作用. 在高一高二的立体几何学习中, 主要学习的是空间图形具有什么特征, 图形位置关系具有的性质和判定方法等基础知识, 而对于立体几何中研究什么、研究的基本路径是什么、研究的基本方法是什么、解决立体几何问题的基本思路是什么等立体几何的基本问题关注得不多, 而这些才是真正提升学生发现问题、解决问题的能力, 发展核心素养的重要方面^[1].

立体几何的折叠问题是一个非常好的载体, 它既是学生手可及的、可直观感知也可操作确认的几何模型, 又有多变的位置关系, 并且这类问题也是高考中常见的数学情境, 学生对这类问题的研究的不足之处是难以把握图形变化中的本质. 笔者设计了一节课, 让学生经历对折叠模型“直观感知(识图)——操作确认(画图)——度量计算(算图)——思辨论证(证图)”^[1]的探索过程, 从中体会研究立体图形的基本思路和方法, 从而逐步学会解决与立

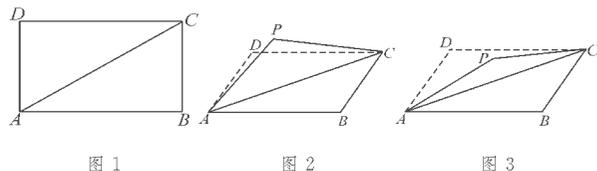
体图形有关的问题, 发展直观想象和逻辑推理的数学核心素养.

三、教学实践

师: 在高三的复习中, 我们不能一味地刷题, 还要停下来思考研究问题, 通过探究问题, 抓住其本质规律, 才能更好地达成“学以致用”“举一反三”的效果. 在高考中, 常常在平面图形折叠成几何体的情境里设计立体几何问题, 今天我们就来研究这一类问题.

1. 直观感知, 认识规律

问题 1 将四边形 $ABCD$ (图 1) 沿着 AC 折起 (学生拿出一张 A4 纸进行折叠感知), 使 $\triangle ADC$ 折至 $\triangle APC$ 的位置, 如图 2、图 3, 你能说出图形折叠过程中的变化量及不变量吗?



设计意图 折叠问题的难点是图形的动态变化, 为了突破难点, 课堂中让学生直观感知图形, 从问题模型的生成出发, 用问题启发学生思考其本质规律.

教师总结提炼学生的回答, 指出要点.

折叠过程中的不变量: “折叠面”(即折痕两侧的平面) 内部三角形的边角关系不变, 如图 1 中的 $\triangle ABC$ 及 $\triangle ADC$. 其中不变量中的垂直关系常常是证明线面垂直和面面垂直的重要线索, 如图 1 中有 $\angle B = 90^\circ, \angle D = 90^\circ$, 则折叠后 (图 2、图 3) 有 $\angle ABC = 90^\circ, \angle APC = 90^\circ$.

折叠过程中变化的量: 两个“折叠面”的位置关系发生变化. 体现在: (1) 二面角 $P-AC-B$ 的变化;

(2) 两点 B 、 P 的距离.

2. 操作确认,理解规律

追问:刚才的折叠图形确定下来了吗?

师:是否“确定”,在于是否有对“折叠程度”的描述,有些问题可能通过描述折叠后二面角 $P-AC-B$ 的大小或者 B 、 P 两点的距离来刻画,也有些问题并没有确定“折叠程度”.

问题 2 能否用图形中的一个面来描述“折叠”的动态过程?你能用它来描述折叠中的“折叠程度”吗?这个面中,哪些位置关系是不变的?哪些位置关系是变化的?

设计意图 通过问题 2 的提问,推动学生对问题进行“定量”描述.这个过程离不开围绕问题 1 提出的“不变量”与“动态变化量”的描述.

师:请同学们在平面图形 $ABCD$ 中作“折痕” AC 的垂线 DF ,其中 DF 交 AC 于 H ,折叠后,你还能在它的直观图中找出这两条线吗?请把它画出来(图 4、图 5、图 6).

观察图 4 至图 5 的折叠过程,“折痕” AC 与平面 PHF 的关系如何?

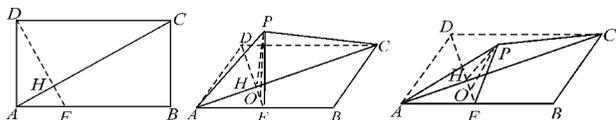


图 4 图 5 图 6

总结学生的观察结果,在平面图形 4 中, $AC \perp DF$,将 $\triangle DAC$ 沿着 AC 折成 $\triangle PAC$ 时,直线 DF 本是平面图形中的一条线,通过折叠变成两条线 PH , HF (一条变两条); $AC \perp DF$ 变成了 $AC \perp PH$, $AC \perp HF$,则 $AC \perp$ 面 PHF ,所以,面 PHF 是二面角 $P-AC-B$ 的垂面, $\angle PHF$ 是二面角 $P-AC-B$ 的平面角.于是,无论折叠到什么程度,折叠过程中的不变量有:(1) $AC \perp$ 面 PHF ;(2) P 在底面 ABC 上的投影 O 一定在射线 HF 上.

折叠过程中变化的量: $\angle PHF$ 是二面角 $P-AC-B$ 的平面角.可用它来描述折叠过程中的“折叠程度”.

追问:解决折叠问题的关键是什么?

(1) 理清折叠(动态变化)过程中的不变量(特别是不变量中的垂直关系),以及对描述“折叠程度”的条件的挖掘;

(2) 注意联系折叠前后平面图形与立体图形间的边角关系,把空间问题转化成平面问题;

(3) 画垂直于“折线”的垂面,常常用它来“定

量”描述折叠状态.

3. 推理论证,度量计算(解题过程略写)

类型一:关注“不变量”.

题 1 (多选题)如图 7,在边长为 2 的正方形 $ABCD$ 中,点 E 是 AB 的中点,点 F 是 BC 的中点,点 M 是 AD 上的动点.将 $\triangle AED$ 、 $\triangle DCF$ 分别沿 DE 、 DF 折起,使 A 、 C 两点重合于 P ,连接 EF , PB .下列说法正确的是().

- A. $PD \perp EF$
- B. 若把 $\triangle EBF$ 沿着 EF 继续折起,则 B 与 P 恰好重合
- C. 无论 M 在哪里, PB 不可能与平面 EFM 平行
- D. 三棱锥 $P-DEF$ 的外接球表面积为 6π

答案:ABD.(根据图 8 推理论证)

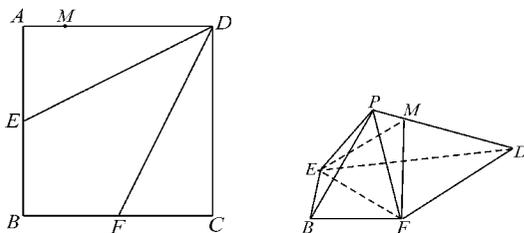


图 7 图 8

设计意图:关注图形中的不变量,发挥直观想象,改变图形的摆放角度,问题迎刃而解.

类型二:“折叠程度”确定.

题 2 如图 9,已知边长为 4 的正方形 $ABCD$, E 是 AB 的中点,将 $\triangle ADE$ 沿 DE 折起至 $\triangle PDE$,若 $\triangle PCD$ 为正三角形,则二面角 $P-CD-B$ 的大小是_____.

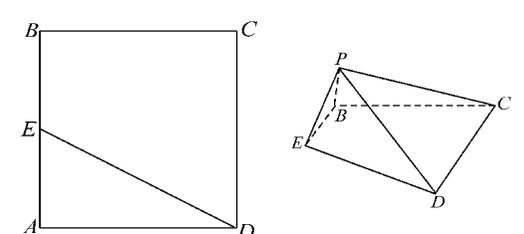


图 9

答案: 30° . (教师引导学生作图 10,然后解答)

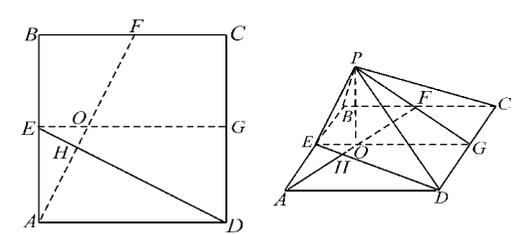


图 10

设计意图:抓住核心特点“折叠程度”及“折叠

中的不变量”，作出辅助线，解决问题.

类型三：“折叠程度”不确定.

题 3 (多选) 已知菱形 $ABCD$ 中, $\angle BAD = 60^\circ$, AC 与 BD 相交于点 O . 将 $\triangle ABD$ 沿 BD 折起, 使顶点 A 至点 P , 在折起的过程中, 下列结论正确的是().

- A. $BD \perp CP$
- B. 存在一个位置, 使 $\triangle CDP$ 为等边三角形
- C. DP 与 BC 不可能垂直
- D. 直线 DP 与平面 BCD 所成的角的最大值为 60°

答案: ABD.

设计意图: 当“折叠程度”不确定时, 折叠是一个动态过程, 抓住不变量来解决问题.

4. 思辨论证, 考题练兵

类型四: 高考中的折叠问题

题 4 (2018 年全国 I 卷理科) 如图 11, 四边形 $ABCD$ 为正方形, E, F 分别为 AD, BC 的中点, 以 DF 为折痕把 $\triangle DFC$ 折起, 使点 C 到达点 P 的位置, 且 $PF \perp BF$.

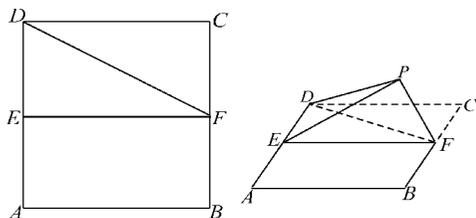


图 11

- (1) 证明: 平面 $PEF \perp$ 平面 $ABFD$;
- (2) 求 DP 与平面 $ABFD$ 所成角的正弦值.

师: 同学们, 拿到问题首先我们关心什么?

生: “折叠程度”及图形中的不变量.

师: 有没有给出对“折叠程度”的描述?

生: $PF \perp BF$.

师: 大家想想, 此时平面 PDF 是否与底面 $ABFD$ 垂直?

(帮助学生认识图形, 生讨论)

师: 如果平面 PDF 不与底面 $ABFD$ 垂直, 那 P 在底面的投影会落在哪里?

(生讨论)

师: 请大家思考, 分析, 想象折叠后的图形, 组织好你的思路, 进行论证.

追问: 若没有第(1)问构造的面 PEF , 你能算出第(2)问吗?

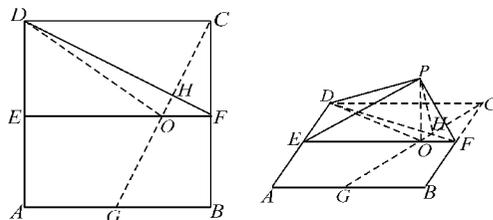


图 12

如图 12, 作 $CG \perp DF$ 交 DF 于 H , 交 AB 于 G , 因为 $CH \perp DF$, $HG \perp DF$, 所以 $HP \perp DF$, 所以 $DF \perp$ 面 PGH , 从而面 $ABFD \perp$ 面 PGH . 又因为 $PO \perp$ 面 $ABCD$, 所以 O 在直线 CG 上, 则用底面 $ABCD$ 的平面图形可算得.

5. 课堂小结与作业(略)

四、教学反思

1. 重视识图与作图能力, 发展直观想象素养.

课程标准中对“直观想象”素养的要求(水平二)指出: “能够在关联的情境中, 想象并构建相应的几何图形, 能够借助图形提出数学问题, 发现图形与图形, 图形与数量的关系, 探索图形的运动规律.” 作图是立体几何学习的“第一大事”^[3], 平面几何图形是很好画的, 长度和角度都是“准确的”, 而立体图形的直观图, 由于是在二维平面上作三维图形, 其线段长度和角的大小都会因此有所“偏差”, 如何识图和作图, 是学生学会如何有效应用所学的平面几何知识去理解空间的本质的重要途径. 在立体几何教学中, 教师应尽量少给甚至不给几何图形直观图, 重视让学生“重现”图形的能力, 例如题 1, 往往学生把图画好了, 题目也就做出来了, 相反, 如果老师直接给了图, 切断了学生从平面图形到立体图形的思考过程, 反而做不好.

2. 空间图形问题转化为平面图形, 是解决空间图形问题的重要思想方法.

立体几何初步的教学重点是帮助学生逐步形成空间的观念, 通过整体到局部, 具体到抽象等方式帮助学生认识空间几何体的结构特征, 进一步掌握在平面上表示空间图形的方法和技能, 是相对于平面几何更高的思维活动. 把空间图形问题转化为平面图形, 是解决空间图形问题的重要思想方法. 在本课例中, 作出折叠过程中的“垂面”来定量刻画“折叠程度”, 如题 4 的追问, 就是在启发学生使用和体会“平面化”的思想方法. 在教学中, 教师需反复引导学生运用“平面化”的方法帮助学生理解图形, 解决问题.

(下转第 22 页)

列出符合条件的代数式.

(二) 梳理总结

教师引导学生回顾本单元的学习内容,回答下列问题:

(1) 函数零点的常用探究方法有哪些?

(2) 对于一元二次方程根的分布,常见的解决方法有哪些?

(3) 通过本节课的学习,你对函数与方程有哪些新的认识?对于给出一个新的函数,如何研究这个函数的零点,你有哪些体会?

设计意图:通过小结,复习巩固本单元所学的知识,加深对函数与方程的理解.通过对本单元研究过程的总结,体会函数零点的解决方法,进一步体会研究函数与方程的一般思路与方法.

(三) 布置作业(略)

4. 结束语

单元教学是新课改给教师提出的一个新的课题,单元教学设计对于教师整体把握教学目标、整体

把握课程内容、整体实施教学步骤以及实施整体性评价具有积极的作用.同时,单元教学有利于学生对知识的整体性理解,有利于学生学习方式的改变以及有利于学生核心素养的养成.在新课改中,关于单元教学,需要教师勇于思考,勇于探索和实践.

参考文献:

- [1] 吕世虎,吴振英,杨婷,王尚志.单元教学设计及其对促进数学教师专业发展的作用[J].数学教育学报,2016(5):16-21.
- [2] 黄华.高中数学单元教学设计指南[M].北京:人民教育出版社,2018.
- [3] 史宁中,王尚志.普通高中数学课程标准(2017年版)解读[M].北京:高等教育出版社,2018.
- [4] 章建跃,李增沪.普通高中教科书(数学必修第一册)[M].北京:人民教育出版社,2019.

(收稿日期:2021-02-24)

(上接第17页)

3. 重视几何语言“实物模型—图形—文字—符号”的使用,发展逻辑推理素养.

立体几何是发展学生的逻辑推理素养的重要载体.学生从折叠手上的A4纸即“实物模型”到笔下画出的折叠的直观图即“图形语言”,再到描述图形折叠过程中的“不变量”与“变量”(文字语言或符号语言),这些几何语言能帮助学生有逻辑地思考与表达.而在立体几何证明题中的推理论证,更是逻辑推理素养的更高表现,也是高考考查的重要能力之一,教师应加强对论证过程的规范和指导,这也是高三复习课的重要教学目标.

4. 让学生经历图形的研究过程,提升解决问题的能力.

课程标准提出,学生应当通过高中数学课程的学习,获得进一步学习以及未来发展所必须的数学基础知识、基本技能、基本思想和基本活动经验(四基),提高从数学角度发现和提出问题的能力、分析和解决问题的能力(四能),并发展其数学核心素养.因此,数学课不仅要使学生能学到具体的知识,更能在这一过程中体会研究几何图形性质的一般思路和方法,学会“用数学的思维思考世界”,培养发现问题

和提出问题的能力^[1].知识的发生发展是螺旋上升的,高三的复习课更不能忽略提高学生解决问题能力的目标,反而更应该“授之以渔”,加强研究问题的一般步骤的引导:明确研究对象——怎么研究——提炼研究的思想方法,以获得真正的学习能力.

参考文献:

- [1] 李海东.重视研究立体几何图形的过程和方法,发展直观想象、逻辑推理素养[J].中学数学教学参考(上旬),2020(7).
- [2] 狄理磊.高三复习课中发展学生数学核心素养的几点认识——立体几何轨迹问题为例[J].中学教研(数学),2017(7).
- [3] 章建跃.立体几何教学中的几个问题[J].中学数学月刊,2015(10).
- [4] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)[M].人民教育出版社,2020.
- [5] 周建平.变化中的不变量,谈立体几何中的折叠问题[J].中学教研(数学),2018(7).

(收稿日期:2021-02-17)