

江苏省仪征中学 2020 届高三（上）期中考试热身练习 3

班级_____ 姓名_____ 学号_____ 评价_____

一、填空题：

1. 已知集合 $A = \{1, 3\}$, $B = \{3, 9\}$, 则 $A \cup B =$ _____.

2. 如图复数 $\frac{2-bi}{3+i}$ ($b \in R$) 的实部与虚部互为相反致, 则 b 等于_____.

3. $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(-x^2 - 2x + 3)$ 的定义域为_____.

4. 向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角为 60° , $\vec{a} = (2, 0), |\vec{b}| = 1$, 则 $|\vec{a} + 2\vec{b}| =$ _____.

5. 若 $\alpha, \beta \in (0, \pi), \cos \alpha = -\frac{7}{\sqrt{50}}, \tan \beta = -\frac{1}{3}$, 则 $\alpha + 2\beta =$ _____.

6. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的两条渐近线方程为 $y = \pm 2x$, 则该双曲线的离心率为_____.

7. 已知 $y = f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数, 当 $x \in [0, +\infty)$ 时, $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in [0, 1] \\ f(x-1), & x \in [1, +\infty) \end{cases}$, 则 $f(-\frac{\pi}{6} - 5) =$ _____.

8. 已知在 $\triangle ABC$ 中, $AC=1, BC=3$. 若 O 是该三角形内的一点, 满足 $(\vec{OA} + \vec{OB}) \cdot (\vec{CA} - \vec{CB}) = 0$, 则 $\vec{OC} \cdot \vec{AB} =$ _____.

9. 已知 $\sin 2\alpha - 2 = 2\cos 2\alpha$, 则 $\sin^2 \alpha + \sin 2\alpha =$ _____.

10. 已知点 A, B 是圆 $O: x^2 + y^2 = 4$ 上任意两点, 且满足 $AB = 2\sqrt{3}$. 点 P 是圆 $C: (x+4)^2 + (y+3)^2 = 4$ 上任意一点, 则 $|\vec{PA} + \vec{PB}|$ 的取值范围是_____.

11. 已知圆 $M: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$, 直线 $l: x+y-6=0$, A 为直线 l 上一点.

若圆 M 上存在两点 B, C , 使得 $\angle BAC = 60^\circ$, 则点 A 横坐标的取值范围是_____.

12. 设实数 $a \geq 1$, 若不等式 $x|x-a| + 2 \geq a$, 对任意的实数 $x \in [1, 3]$ 恒成立, 则满足条件的实数 a 的取值范围是_____.

二、解答题：

13. 知函数 $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{4}) + \sin(x + \frac{7\pi}{12})$.

(1) 求函数 $y = f(x)$ 最小正周期和单调递增区间；

(2) 当 $x \in [0, \pi]$ 时，试求函数 $y = f(x)$ 的最大值，并写出取得最大值时自变量 x 的值.

14. 圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的四个顶点恰好是一边长为 2，一内角为 60° 的菱形的四个顶点.

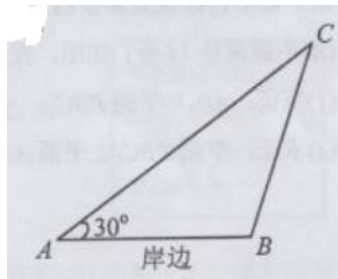
(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 若直线 $y = kx$ 交椭圆 C 于 A 、 B 两点，在直线 $l: x + y - 3 = 0$ 上存在点 P ，使得 $\triangle PAB$ 为等边三角形，求实数 k 的值.

15. 水上运动会，如图，岸边有 A, B 两点， $\angle BAC = 30^\circ$. 小船从 A 点以 v 千米/小时的速度沿 AC 方向匀速直线行驶，同一时刻运动员出发，经过 t 小时与小船相遇. (水流速度忽略不计)

(1) 若 $v = 4$, $AB = 2\text{km}$. 运动员从 B 处出发游泳匀速直线追赶，为保证在 1 小时内 (含 1 小时) 能与小船相遇，试求运动员游泳速度的最小值；

(2) 若运动员先从 A 处沿射线方向在岸边跑步匀速行进 m ($0 < m < t$) 小时后，再游泳匀速直线追赶小船. 已知运动员在岸边跑步的速度为 4 千米/小时，在水中游泳的速度为 2 千米/小时，试求小船在能与运动员相遇的条件下 v 的最大值.



三、附加题：

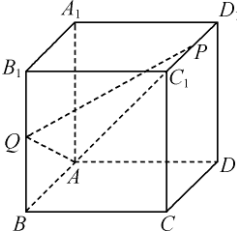
16. T 是按逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 的旋转变换，对应的变换矩阵是 M .

(1) 求点 $P(1, 1)$ 在 T 作用下的点 P' 的坐标：

(2) 求曲线 $C: y = x^2$ 在变换 T 的作用下所得到的曲线 C' 的方程.

17. 如图，在棱长为 2 的正方体 $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ 中，P 为棱 $C_1 D_1$ 的中点，Q 为棱 BB_1 上的点，且 $BQ = \lambda BB_1 (\lambda \neq 0)$.

- (1) 若 $\lambda = \frac{1}{2}$ ，求 AP 与 AQ 所成角的余弦值；
- (2) 若直线 AA_1 与平面 APQ 所成的角为 45° ，求实数 λ 的值.



18. 有大小相同的黑球和白球共 9 个，从中任取 2 个都是白球的概率为 $\frac{5}{12}$. 现甲、乙两人从袋中轮流摸球，甲先取，乙后取，然后甲再取.....，每次摸取 1 个球，取出的球不放回，直到其中有一人取到白球时终止，用随机变量 X 表示取球终止时取球的总次数.

- (1) 求袋中原有白球的个数；
- (2) 求随机变量 X 的概率分布及数学期望 $E(X)$.

答案：

1. {1,3,9}; 2. 1; 3. (-3,1); 4. $2\sqrt{3}$; 5. $\frac{11\pi}{4}$; 6. $\sqrt{5}$; 7. $\frac{1}{2}$; 8. 4; 9. 1 或 $\frac{8}{5}$; 10. [4,16];

11. [1,5]; 12. $1 \leq a \leq 2$ 或 $a \geq \frac{7}{2}$

13.

16. 解: (1) $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{4}) + \sin[(x + \frac{\pi}{4}) + \frac{\pi}{3}] = \frac{3}{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{3}\sin(x + \frac{5\pi}{12})$,4分

所以 $f(x)$ 的周期为 2π ,6分

令 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x + \frac{5\pi}{12} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$,

所以单调递增区间为 $[-\frac{11\pi}{12} + 2k\pi, \frac{\pi}{12} + 2k\pi], (k \in \mathbb{Z})$9分

(2) 因为 $x \in [0, \pi]$, 所以 $x + \frac{5\pi}{12} \in [\frac{5\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}]$,11分

当 $x + \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2}$, 即 $x = \frac{\pi}{12}$ 时, 函数取得最大值为 $\sqrt{3}$14分

14

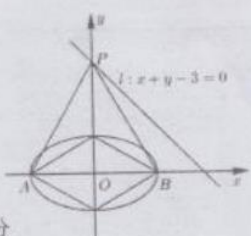
17. 解: (1) 因为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的四个顶点恰好是一边长为 2, 一内角为 60° 的菱形的四个顶点, 所以 $a = \sqrt{3}, b = 1$, 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$4分

(2) 设 $A(x_1, y_1)$, 则 $B(-x_1, -y_1)$.

① 当直线 AB 的斜率为 0 时, AB 的垂直平分线就是 y 轴, y 轴与直线 $l: x + y - 3 = 0$ 的交点为 $P(0, 3)$,

又 $|AO| = \sqrt{3}, |PO| = 3 \Rightarrow |AB| = |PA| = |PB| = 2\sqrt{3}$,

所以 $\triangle PAB$ 是等边三角形, 所以 $k = 0$ 满足条件;7分



② 当直线 AB 的斜率存在且不为 0 时, 设 AB 的方程为 $y = kx$,

所以 $\begin{cases} \frac{x^2}{3} + y^2 = 1 \\ y = kx \end{cases}$, 化简得 $(3k^2 + 1)x^2 = 3$, 解得 $|x_1| = \sqrt{\frac{3}{3k^2 + 1}}$.

所以 $|AO| = \sqrt{1 + k^2} \sqrt{\frac{3}{3k^2 + 1}} = \sqrt{\frac{3k^2 + 3}{3k^2 + 1}}$,9分

又 AB 的中垂线为 $y = -\frac{1}{k}x$, 它与 l 的交点记为 $P(x_0, y_0)$,

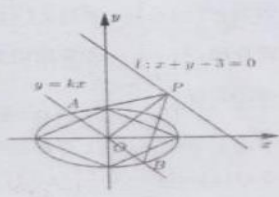
由 $\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ y = -\frac{1}{k}x \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x_0 = \frac{3k}{k-1} \\ y_0 = \frac{-3}{k-1} \end{cases}$.

则 $|PO| = \sqrt{\frac{9k^2 + 9}{(k-1)^2}}$,11分

因为 $\triangle PAB$ 为等边三角形, 所以应有 $|PO| = \sqrt{3}|AO|$,

代入得到 $\sqrt{\frac{9k^2 + 9}{(k-1)^2}} = \sqrt{3} \sqrt{\frac{3k^2 + 3}{3k^2 + 1}}$, 解得 $k = 0$ (舍), $k = -1$,

综上可知, $k = 0$ 或 $k = -1$14分



15.

18. 解: (1) 设运动员游泳速度为 x 千米/小时,
 由题意可知 $(xt)^2 = 2^2 + (4t)^2 - 2 \times 2 \times 4t \cos 30^\circ$,3 分
 整理得 $x^2 = \frac{4}{t^2} - \frac{8\sqrt{3}}{t} + 16 = 4\left(\frac{1}{t} - \sqrt{3}\right)^2 + 4$, 由于 $0 < t \leq 1$, 所以 $\frac{1}{t} \geq 1$,
 所以, 当 $\frac{1}{t} = \sqrt{3}$, 即 $t = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, x^2 取得最小值 4, 即 x 最小值为 2.6 分
 答: 运动员游泳速度的最小值为 2 千米/小时.7 分
 (2) 由题意知 $[2(t-m)]^2 = (4m)^2 + (vt)^2 - 2 \times 4m \times vt \cos 30^\circ$,9 分
 两边同除以 t^2 得: $12\left(\frac{m}{t}\right)^2 + (8-4\sqrt{3}v)\frac{m}{t} + v^2 - 4 = 0$,
 设 $\frac{m}{t} = k$, $0 < k < 1$, 则有 $12k^2 + (8-4\sqrt{3}v)k + v^2 - 4 = 0$, 其中 $k \in (0, 1)$,
 即关于 k 的方程 $12k^2 + (8-4\sqrt{3}v)k + v^2 - 4 = 0$ 在 $(0, 1)$ 上有解,11 分
 则必有 $\Delta = (8-4\sqrt{3}v)^2 - 4 \times 12 \times (v^2 - 4) \geq 0$, 解得 $0 < v \leq \frac{4\sqrt{3}}{3}$,13 分
 当 $v = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ 时, 可得 $k = \frac{1}{3} \in (0, 1)$, 因此 v 的最大值为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$15 分
 答: 小船的最大速度为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 千米/小时.16 分

16

21. A. 解: (I) $M = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $M \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 3 分
 所以点 $P(1,1)$ 在 T 作用下的点 P' 的坐标是 $P'(-1,1)$5 分
 (II) 设 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 是变换后曲线 C' 上任意一点, 与之对应的变换前的点是 $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$,
 则 $M \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, 也就是 $\begin{cases} -y_0 = x \\ x_0 = y \end{cases}$, 即 $\begin{cases} x_0 = y \\ y_0 = -x \end{cases}$,8 分
 故所求曲线 C' 的方程是 $y^2 = -x$10 分

17. 解: 以 $\{\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AA_1}\}$ 为正交基底, 建立如图所示空间直角坐标系 $Axyz$.

(1) 因为 $\vec{AP} = (1, 2, 2)$, $\vec{AQ} = (2, 0, 1)$,

$$\text{所以 } \cos \langle \vec{AP}, \vec{AQ} \rangle = \frac{\vec{AP} \cdot \vec{AQ}}{|\vec{AP}| |\vec{AQ}|} = \frac{1 \times 2 + 2 \times 0 + 2 \times 1}{\sqrt{9} \times \sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{15}.$$

所以 AP 与 AQ 所成角的余弦值为 $\frac{4\sqrt{5}}{15}$. (4 分)

(2) 由题意可知, $\vec{AA_1} = (0, 0, 2)$, $\vec{AQ} = (2, 0, 2\lambda)$.

设平面 APQ 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{AP} = 0, \\ \vec{n} \cdot \vec{AQ} = 0, \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} x+2y+2z=0, \\ 2x+2\lambda z=0. \end{cases} \quad \text{令 } z=-2, \text{ 则 } x=2\lambda, y=2-\lambda.$$

所以 $\vec{n}=(2\lambda, 2-\lambda, -2)$. (6分) 因为直线 AA_1 与平面 APQ 所成角为 45° ,

$$\text{所以 } |\cos \langle \vec{n}, \vec{AA_1} \rangle| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{AA_1}|}{|\vec{n}| |\vec{AA_1}|} = \frac{4}{2\sqrt{(2\lambda)^2 + (2-\lambda)^2 + (-2)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

可得 $5\lambda^2 - 4\lambda = 0$. 因为 $\lambda \neq 0$, 所以 $\lambda = \frac{4}{5}$. (10分)

18.

【必做题】第22题、第23题，每题10分，共计20分，解答时应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

22. 解: (1) 设袋中原有 n 个白球 ($n \geq 2$), 则从9个球中任取2个球都是白球的概率为 $\frac{C_n^2}{C_9^2}$,

由题意知 $\frac{C_n^2}{C_9^2} = \frac{5}{12}$, 即 $\frac{n(n-1)}{9 \times 8} = \frac{5}{12}$, 化简得 $n^2 - n - 30 = 0$.

解得 $n=6$ 或 $n=-5$ (舍去), 故袋中原有白球的个数为6.4分

(2) 由题意, X 的可能取值为1, 2, 3, 4.

$$P(X=1) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}; \quad P(X=2) = \frac{3 \times 6}{9 \times 8} = \frac{1}{4};$$

$$P(X=3) = \frac{3 \times 2 \times 6}{9 \times 8 \times 7} = \frac{1}{14}; \quad P(X=4) = \frac{3 \times 2 \times 1 \times 6}{9 \times 8 \times 7 \times 6} = \frac{1}{84}.$$

所以取球次数 X 的概率分布列为:

X	1	2	3	4
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{84}$

所求数学期望为 $E(X) = 1 \times \frac{2}{3} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{14} + 4 \times \frac{1}{84} = \frac{10}{7}$10分