4.4 在数学建模活动和数学探究活动中,教师的引导作用也至关重要

教师应根据教科书的设计,引导学生从模仿到自主,从局部到整体,逐步提升数学建模和数学探究的能力.在学习其他主线中的相关知识时,教师应通过有意识地点拨使学生明白这些分散的内容与数学建模、数学探究活动的关系,为日后完整的课题活动作准备.在课题学习中,教师应引领学生完成活动范例,在学生的选题及团队组建上给出建议,并组织好后期的交流展示环节.建模的过程应放手让学生操作,只在关键环节、关键思想方法上加以点拨,使学生积累发现、提出、分析和解决问题的经验,积累独立思考和合作交流的经验,更好地体验数学的基本思想.

总之,数学建模活动和数学探究活动是综合性的实践活动,是综合提升学生的数学核心素养的有效载体.每一个参加数学建模和数学探究活动的学生都应该自己主动地发现、提出、分析、解决问题,这正是时代所需要的问题意识、创新精神和实践能力.鉴于教科书呈现的局限性,教科书在引领学生发现问题方面还有所欠缺.教科书呈现的数学建模与数学探究活动都是在给定选题下的活动,如何更好地引导学生自己发现并提出有意义的问题,进而分析并解决问题是教科书编者和教师需共同深思的问题,值得大家共同努力!

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017年版)[S]. 北京:人民教育出版社, 2018.

[2] 史宁中,王尚志.普通高中数学课程标准(2017 年版)解读[M].北京:高等教育出版社,2018.

[3] 章建跃,李增沪.普通高中教科书数学必修第一册(A版)[M].北京:人民教育出版社, 2019.

[4] 章建跃,李增沪.普通高中教科书数学选择性必修第三册(A 版)[M].北京:人民教育出版社, 2019.

[5] 章建跃,李增沪.普通高中教科书数学必修第二册(A版)[M].北京:人民教育出版社, 2019.

作者简介 张艳娇(1984—),女,山东淄博人,中级职称.研究方向:数学课程、教材、教法研究.主要成绩:新人教 A 版《普通高中教科书·数学》核心编者,《盲校义务教育实验教科书·数学》核心编者,《体育运动学校义务教育实验教科书·数学》核心编者.

立足整体观 研究新教材*

——以“余弦定理、正弦定理”的内容解读为例

华东师范大学第二附属中学 201203 任念兵 汪 健

【摘 要】 以新教材“余弦定理、正弦定理”的内容解读为例,从“是什么”(知识的内涵)“为什么”(知识所蕴含的思想方法)和“还有什么”(知识的结构网络)三个方面,分析了立足数学整体观研读教材的方法和路径.

【关键词】 整体观;研读教材;知识内涵;思想方法;结构网络

发挥数学的育人价值,主要依靠数学内在的逻辑力量,这就要求教师能够以数学核心素养为目标导向,分析数学知识蕴含的育人价值.数学教师教学水平的高低,首当其冲地体现在对数学知识内容的理解、把握上.高水平的教师,在教教材显性知识的同时,能挖掘出其背后的隐性知识,讲出一些别人教不出来的内容,这些不易教到的隐性知识,就是数学的本质.而大量课堂观察表明,数学教学质量低下的原因,追本溯源,主要来自于教师的数学理解不到位[1].要在“理解数学”方面打下扎实的数学基本功,教师必须认真研读教材,切实把握教材内容的内涵和外延,形成对数学知识的深刻感悟;也唯有如此,才能在教学实践中充分利用教材所蕴藏的丰富教学资源,根据学情适当取舍,真正做到“用教材教”,最终形成以“四基”“四能”为载体发展学生核心素养的育人能力.

* 本文是上海市浦东新区 2018 年教育科学研究项目重点课题"基于高中数学核心素养的中观教学设计与实践研究"(编号 A201806)的阶段性研究成果.

如何研读教材,深刻理解高中数学课程内容呢?关键是抓住整体性.从知识的结构体系、逻辑关系出发,整合数学教学内容,注重知识、思想方法的前后联系,形成高中数学知识的整体架构.具体而言,就是针对教材内容,解读数学知识的内涵、知识所蕴含的思想方法和知识的结构网络(包括上位知识、下位知识及它们之间的联系等).通俗地说,对于数学概念、原理(法则、定理、公式等),不仅需要知道“是什么”,还应理解“为什么”“还有什么”.

比如“解三角形”内容,出现在普通高中教科书数学A版(以下简称“新教材”)的“§6.4.3 余弦定理、正弦定理”[2]中.不同于普通高中课程标准实验教科书数学A版[3]将“解三角形”单独设置为一章的处理方式,新教材将“余弦定理、正弦定理”作为“§6.4 平面向量的应用”的一部分,并且改变了两个定理的出现顺序(以往是先“正弦定理”后“余弦定理”),其中的道理颇值得玩味.本文以新教材的这部分内容为例,具体谈谈整体观下研读教材的方法和路径.

1 是什么:知识的内涵

一个三角形包含的各种几何量之间存在着某些确定的关系,比如三边的边长、三个内角的度数、面积、高、外径、内径等在一定条件下可以相互表达.三条边、三个内角是三角形所有要素中的基本要素,这六个基本要素之间的基本定量关系(定理),就是三角定律.

1.1 余弦定理、正弦定理反映了(含边长的)最少基本要素之间的定量关系

在三角形的六个基本要素中,几个要素之间肯定会存在的基本定量关系有哪些?

考虑某三个基本要素之间的定量关系,除了三角形内角和为π外,别无其他;考虑某四个基本要素之间的定量关系,分为三类情况:三条边和一个内角(余弦定理)、两条边和两个内角(正弦定理)、一条边和三个内角(没有确定性关系);考虑某五个基本要素之间的定量关系,分为两类情况:三条边和两个内角、两条边和三个内角.

对于$\triangle ABC$中的三条边和两个内角之间的定量关系,有经典的结论(射影定理):$a=b\cos C+c\cos B$,$b=c\cos A+a\cos C$,$c=a\cos B+b\cos A$.对于$\triangle ABC$中的两条边和三个内角(比如两边a,b、三个内角A,B,C),倘若它们之间存在定量关系,其表达式往往过于复杂,因而不作为基本的等量关系来研究,六个基本要素之间的定量关系也是如此.

可见,余弦定理和正弦定理反映了六个基本要素中四个基本要素之间的定量关系,这是存在定量关系(含边长)的前提下,基本要素的数量最少的两个三角定律,这是余弦定理、正弦定理的本质.只要知道三角形的三个基本要素(其中至少有一条边的边长),就能确定其他要素(有时需要讨论两种情况).洞察了余弦定理、正弦定理的本质,就能理解新教材中不再专门介绍其他定理(如射影定理)的原因.

1.2 余弦定理、正弦定理是“三角形”的代数表述

要分析余弦定理、正弦定理的内涵,需要深入思考定理的条件和结论.弄清楚这两个定理的条件和结论,就是弄清楚“三角形”与等式组“$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$”“$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$,$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$”之间的关系,这有助于理解余弦定理、正弦定理是“三角形”这个几何图形的代数刻画.

余弦定理、正弦定理的条件是相同的.大前提为:六个量$a,b,c\in(0,+\infty)$,$A,B,C\in(0,\pi)$.条件1:a,b,c为三角形的三条边;条件2:A,B,C为同一三角形的三个内角;条件3:A,B,C分别是a,b,c的对角.余弦定理的结论可以分解为三个,结论1:$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$;结论2:$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$;结论3:$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.正弦定理的结论可以分解为两个,结论1:$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$;结论2:$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

正弦定理逆命题:若$a,b,c\in(0,+\infty)$,$A,B,C\in(0,\pi)$,满足$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$,则长度为$a,b,c$的线段构成三角形,且边$a$的对角为$A$,边$b$的对角为$B$,边$c$的对角为$C$.

余弦定理逆命题:若$a,b,c\in(0,+\infty)$,$A,B,C\in(0,\pi)$,满足$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$,$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$,则长度为a,b,c的线段构成三角形,且边a的对角为A,边b的对角为B,边c的对角为C.

上述正弦定理的逆命题不成立(比如$a=b=c=1$,$A=B=C=\frac{2\pi}{3}$),余弦定理的逆命题成立,这说明余弦定理中的等式组与“三角形”是等价的,而正弦定理中的等式组是“三角形”的必要不充分条件.当然,若在正弦定理逆命题中增加条件,则可以得到下面的真命题:

若 $a,b,c\in(0,+\infty)$，$A,B,C\in(0,\pi)$，$A+B+C=\pi$，且满足 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，则长度为 a,b,c 的线段构成三角形，且边 a 的对角为 A，边 b 的对角为 B，边 c 的对角为 C.(此结论和余弦定理逆命题的证明均可查阅文献[4])

综上所述，余弦定理、正弦定理的内涵，既是三角形中(含边长的)最少基本要素之间的定量关系，又是“三角形”这个几何图形的某种代数表述.

2　为什么：知识所蕴含的思想方法

余弦定理的证明曾两度出现在高考题中，1981 年高考全国卷(理)第四大题：写出余弦定理，并加以证明；2011 年高考陕西卷第 18 题：叙述并证明余弦定理.值得警惕的是，2011 年高考此题的阅卷结果很不理想，文科得分率为 0.28，理科为 0.45，均未过半[5].考试结果在一定程度上暴露了当前数学教学中普遍存在的问题：教师未能理解知识蕴含的思想和方法，在教学中忽视数学知识发生发展的过程，采取大运动量、模式化的解题训练.

解读余弦定理、正弦定理的证明方法，有利于建立新旧知识间的联系，更有利于挖掘知识本身所蕴含的思想和方法，是教师研读教材、“理解数学”的重要抓手.

余弦定理的证法很多，常见的证法有：平面几何法(需要讨论三种情况，即锐角、直角、钝角三角形)、解析法(需要利用任意角三角函数的概念表示某个顶点的坐标)和向量法(需要利用向量的数量积).正弦定理的证法也有不少，常见的证法有：平面几何法(将三角形同一底边上的高用两种不同的方式进行表达)、面积法、外接圆法和向量法.

纵观两个定理的各种证法，“算两次”是蕴藏其中的最重要的思想.为了建立相等关系，需要把同一个量以两种不同的方法表示出来，这就是算两次原理(又称富比尼原理).高中数学教材中多次出现用算两次思想来解决问题，比如两角和的余弦公式的推导、用等积法求点到平面的距离、很多组合恒等式的证明等等.在余弦定理的解析法证明中，一个内角 C 所对的边有两种表示方法，一种是直接记为边 c，一种是用点 A，B 的坐标来表示，这两种表示的量相等，从而结合两点距离公式和三角恒等式，得到余弦定理的一个等式 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.在正弦定理的面积法证明中，三角形面积有多种表示方式，从而建立等式 $\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B$，再通过式子变形即可得到正弦定理.

新教材中证明余弦定理、正弦定理的方法都是向量法，这体现了向量这种“有向度量”在研究几何问题中的特有价值.所谓“有向度量”是指带有方向的度量，研究既有二值(正、负)有向性又有可加性的几何量，包括一维空间的有向距离、二维空间的有向面积和三维空间的有向体积.有向度量的概念散见于高中数学教材中的三角、向量、解析几何、立体几何等主干内容中[6].人们在运用诸如有向线段、有向角、有向面积等类似向量的有向度量时，无需顾忌线段的方向、角的顺逆、图形的相对位置等，从而能够将经典平面几何的结论进行批量化的推广.新教材在利用向量法证明余弦定理、正弦定理时，可以避免平面几何证法中的讨论，借助向量来统一锐角、直角、钝角三角形这三种情况.德国大数学家 F · 克莱因在名著《高观点下的初等数学》的几何部分，就以“作为相对量的线段、面积和体积”开篇，并指出：“对比把长度、面积、体积考虑为绝对值的普通初等几何学，这样做有极大的好处.初等几何必须依照图形呈现的情况而区分许多情况，而现在用几个简单的一般定理就可以概括.”[7]

当然，余弦定理、正弦定理证明中还蕴含着对称思想、分类讨论思想等.挖掘定理证明中所蕴含的思想方法等迁移能力强的知识，是教师“理解数学”能力的重要体现.

3　还有什么：知识的结构网络

在分析了知识的内涵、知识蕴含的思想方法之后，还应弄清楚该知识的上位知识和下位知识分别是什么，基于知识的联系性建立该知识与相关知识的整体结构.对余弦定理、正弦定理的解读，可以从判断三角形解的个数、相关(及衍生)结论、定理的根源等三个方面来建立围绕余弦定理、正弦定理的知识结构网络.

3.1　三角形解的个数

从定性研究到定量分析是数学研究的常见思路.由初中已经学习过的“三角形全等”的判定方法 SAS、ASA、SSS 可知，三角形的形状、大小已经由这三组要素分别唯一确定，余弦定理、正弦定理是这些定性结论的量化表达，三角形全等的判定是余弦定理、正弦定理的上位知识.反过来，利用余弦定理、正弦定理解三角形时，反思满足条件的三角形解的个数，实际上是在定量分析后思考定性结论.新教材专门设置了例题(文献[2]47 页例 8)，分析下面的问题，我们可以从尺规作图“确定”三角形的角度来研究.

问题 在$\triangle ABC$中,已知边a,b和边a所对的角$A(0<A<\pi)$,判断三角形解的个数.

结论1 已知锐角A,边a,b,则三角形解的个数情况如下:

(1)若$0<a<b\sin A$,则无解(如图1);

(2)若$a=b\sin A$,则只有一解(直角三角形,如图2);

(3)若$b\sin A<a<b$,则有两解(如图3);

(4)若$a\geqslant b$,则有一解(如图4).

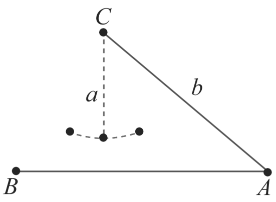

图1

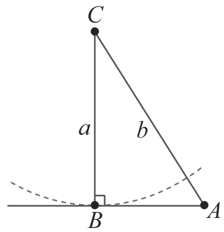

图2

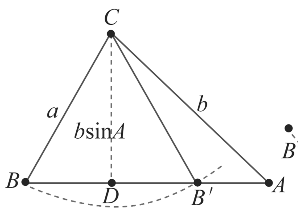

图3

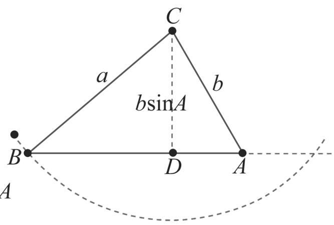

图4

从尺规作图角度来分析,所谓解三角形其实就是"确定"三角形.给定锐角A和边b,确定了射线AB和线段AC,再以点C为圆心、a为半径画弧,交射线AB于点B,交点B的个数就是三角形解的个数.对于"已知钝角A,边a,b"的情况,也可以利用尺规作图的思路得出相应结论.

对于上述"已知两边及其中一边的对角"问题,新教材例8中利用正弦定理定量计算后再作定性分析,其实也可以利用余弦定理来处理.

结论2 由余弦定理知$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,可看成关于c的一元二次方程$c^2-2bc\cos A+b^2-a^2=0$.(*)

(1)若方程(*)有两个不等的正根,则三角形解的个数为2;

(2)若方程(*)有两个相等的正根,则三角形解的个数为1;

(3)若方程(*)有一个正根、一个负根(或零根),则三角形解的个数为1;

(4)若方程(*)无正根,则三角形解的个数为0.

证明 判别式$\Delta=(2b\cos A)^2-4(b^2-a^2)=4(a^2-b^2\sin^2 A)$,显然$\sin A>0$.

若方程(*)有两个不等的正根c_1,c_2,则由$\Delta>0$,$c_1+c_2=2b\cos A>0$,$c_1c_2=b^2-a^2>0$,得$a>b\sin A$,A为锐角,$b>a$,由图3知三角形解的个数为2.

若方程(*)有两个相等的正根$c_1=c_2$,则由$\Delta=0$,$c_1+c_2=2b\cos A>0$,$c_1c_2=b^2-a^2>0$,得$a=b\sin A$,A为锐角,$b>a$,由图2知三角形解的个数为1.

若方程(*)有一个正根c_1、一个负根(或零根)c_2,则由$\Delta>0$,$c_1c_2=b^2-a^2\leqslant 0$,得$a>b\sin A$,$a\geqslant b$,由图4($A$为钝角时类似)知三角形解的个数为1.

若方程(*)无正根,则该方程无解或只有负根(或零根).当$\Delta<0$时,$a<b\sin A$,由图1知三角形解的个数为0.当$\Delta\geqslant 0$时,由$c_1+c_2=2b\cos A\leqslant 0$,$c_1c_2=b^2-a^2\geqslant 0$,知$A\geqslant\dfrac{\pi}{2}$,$b\geqslant a$,从而$A\geqslant\dfrac{\pi}{2}$,$B\geqslant A$,显然不可能,三角形解的个数为0.

以"已知两边及其中一边的对角"的三角形解的个数问题为载体,结合尺规作图手段,可以实现定性与定量分析相结合、几何作图与代数计算相结合,编织余弦定理、正弦定理知识的结构网络.

3.2 相关(衍生)结论

利用余弦定理和正弦定理,可以推导出三角形中的众多经典或有趣的结论,比如射影定理;新教材在习题中利用余弦定理推导了三角形中线长公式(53页第15题)、三角形面积海伦公式(54页第20题),等等.下面再列举几个向量表述的结论和三角恒等式:

命题1 在$\triangle ABC$中,内角A,B,C所对的边分别为a,b,c,则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}$.

命题2 在$\triangle ABC$内任取一点O,用S_A,S_B,S_C分别表示$\triangle BOC,\triangle COA,\triangle AOB$的面积,则$S_A\cdot\overrightarrow{OA}+S_B\cdot\overrightarrow{OB}+S_C\cdot\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$.

命题3 在$\triangle ABC$中,$\sin^2C=\sin^2A+\sin^2B-2\sin A\sin B\cos C$.

命题3′ 在$\triangle ABC$中,$\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C+2\cos A\cos B\cos C=1$.

除了余弦定理、正弦定理外,命题1、2的证明涉及向量中的沙尔定理($\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$)、向量的数量积;命题3′的证明涉及余弦的和角公式等三角恒等式.诸多相关(衍生)结论,将解三角形、三角恒等式、向量等内容紧密联系起来,构建起余弦定理、正弦定理知识的结构网络.

当然,这些命题的证明其实还有其他路径,似乎

并不需要利用余弦定理或正弦定理,这激发了我们寻根究底的研究欲望,余弦定理、正弦定理的理论根源到底是什么呢?

3.3　余弦定理、正弦定理的根源

期刊中有不少文章论证过余弦定理、正弦定理的等价性问题.这些论证都建立在三角形内角和为π的大前提下,并运用了三角恒等式的知识.比如,文[4]就从正弦定理的结论出发,借助 $\sin^2 A+\cos^2 A=1$,$\cos(B+C)=\cos B\cos C-\sin B\sin C$ 等三角恒等式证明了余弦定理.

那么,余弦的和角公式 $\cos(B+C)=\cos B\cos C-\sin B\sin C$ 又是如何推导的呢? 除了平面几何证法外,目前各版本教材的主流证法有两类:一类是旋转单位圆中的三角形,利用旋转前后的三角形全等,借助两点距离的坐标公式,并结合 $\sin^2 A+\cos^2 A=1$ 来证明;另一类是利用向量的数量积来证明.

我们从上述推导余弦定理的逻辑过程中析出四个关键点:$\sin^2 A+\cos^2 A=1$、两点距离公式、余弦的和角公式、向量的数量积.显然前两个结论都基于勾股定理,可见余弦的和角公式也是勾股定理的推论.至于向量的数量积,从本质上说也是余弦定理的衍生物[8].如此说来,余弦定理既是勾股定理的推广,又是勾股定理的推论,包括上述四个结论都是以勾股定理为理论根源.

从知识整体结构上看,若想在余弦的和角公式之前提出正弦的和角公式,则证明需要借助于面积.有的老师提出利用诱导公式将正弦转化为余弦后处理,这种想法有逻辑循环的嫌疑.虽然有其他路径,但一般而言,诱导公式是利用正(余)弦的和角公式来证明的,不能利用诱导公式来证明正(余)弦的和角公式.类似的,正弦定理的证明方法中,利用三角形面积公式的最为简洁和本质.从某种角度上说,正弦的和角公式、正弦定理等"正弦系"的结论根源于面积公式,余弦的和角公式、余弦定理等"余弦系"的结论根源于勾股定理.值得一提的是向量的两种运算——数量积、向量积也可以纳入"正弦系""余弦系":数量积对应于勾股定理(余弦定理),向量积则对应于面积公式.高中阶段不介绍向量的向量积,所以新教材中利用向量数量积先证明余弦定理,再类比余弦定理的向量证明来考虑正弦定理,这也是新教材改变两个定理先后顺序的重要原因.

然而,余弦定理和正弦定理是等价的,说明"正弦系"和"余弦系"是相通的,面积公式和勾股定理这两种度量性质是同源的.回顾勾股定理的证明,最基本的方法就是依据图形的面积,这样"正弦系""余弦系"都统一于面积,难怪已故的著名数学教育家张奠宙先生说,面积是平面几何里的"帝王不变量"[9],实在是一针见血!

以上从三个方面分析了余弦定理、正弦定理的源与流,建立了相关知识之间的联系,构建了围绕两个定理的知识网络结构.梳理数学知识的来龙去脉,是研读教材、理解数学的基本路径.

在整体观下坚持不懈地研读教材,形成对知识的精准认识和深刻理解,才能丰厚自己的专业知识,提高自身的本体性知识水平,最终才会善于洞察显性知识背后的隐性知识,能于无声处听惊雷,于无色处见繁花;才能在理解数学的基础上,结合学生认知的最近发展区设计合乎数学内在逻辑顺序和学生心理认知顺序的教学过程;对数学内容的通透理解,也便于教师设计有价值的评价问题,提升命题能力.总之,立足整体观、研读新教材,是教师专业发展的必由之路!

参考文献

[1]　章建跃.理解数学是教好数学的前提[J].数学通报,2015(1):61-63.

[2]　章建跃,李增沪.普通高中教科书数学 A 版(必修)第二册[M].北京:人民教育出版社,2020:42-54.

[3]　刘绍学.普通高中课程标准实验教科书数学 A 版(必修5)[M].北京:人民教育出版社,2004:1-30.

[4]　蒋亮.关于正弦定理、余弦定理的逻辑分析[J].数学教学,2015(2):1-4.

[5]　罗增儒.2011 年高考数学陕西卷"八个话题"之我见[J].中学数学教学参考(高中版),2011(8):27-31.

[6]　任念兵,汪健.立足教材理解数学优化教学[J].数学通报,2016(8):21-25.

[7]　F·克莱因,舒湘芹等译.高观点下的初等数学(第二卷)[M].上海:复旦大学出版社,2008:6.

[8]　任念兵,汪健.再议在高三复习课上"玩概念"[J].数学通报,2016(4):7-11.

[9]　张奠宙.谈课堂教学中如何进行数学欣赏(续 2)[J].中学数学月刊,2010(12):1-3.

作者简介　任念兵(1981—),安徽安庆人,华东师范大学第二附属中学高级教师,在《中学数学杂志》等刊物发表文章百余篇.

汪健(1984—),上海人,华东师范大学第二附属中学一级教师,在《数学通报》等刊物发表文章十余篇.