

高一数学小练（22）

姓名：_____ 班级：_____ 学号：_____

一、选择题（本大题共 6 小题，共 30.0 分）

1. 将函数 $f(x) = \sin 2x$ 的图象保持纵坐标不变，先将横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$ ，再向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后得到 $g(x)$ ，则 $g(x)$ 的解析式为()

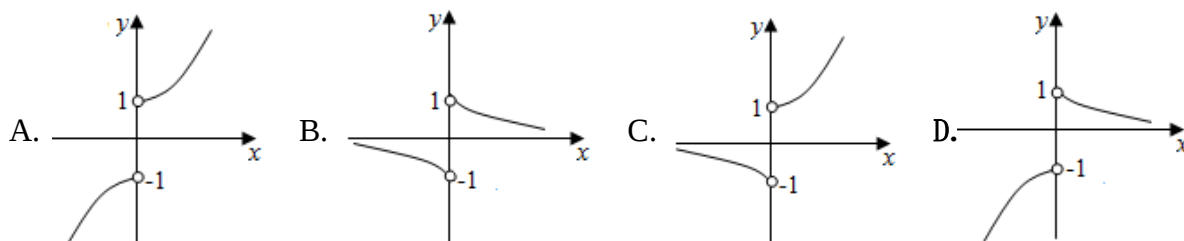
A. $g(x) = \sin(x - \frac{\pi}{6})$ B. $g(x) = \sin(x + \frac{\pi}{6})$

C. $g(x) = \sin(4x - \frac{2\pi}{3})$ D. $g(x) = \sin(4x - \frac{\pi}{6})$

2. 幂函数 $f(x) = (m^2 - m - 1)x^{m^2+m-3}$ 在 $(0, +\infty)$ 时是减函数，则实数 m 的值为()

A. 2 或 -1 B. -1 C. 2 D. -2 或 1

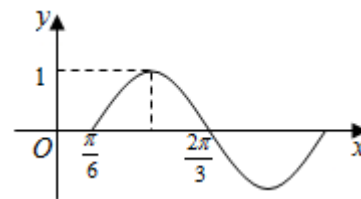
3. 函数 $y = \frac{xa^x}{|x|} (a > 1)$ 的图象的大致形状是()



4. 函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($x \in \mathbb{R}$) ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示，

如果 $x_1, x_2 \in (\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3})$ ，且 $f(x_1) = f(x_2)$ ，则 $f(x_1 + x_2) =$ ()

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$



5. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数， $f(1) = 5$ ，且 $f(x+4) = -f(x)$ ，则 $f(2012) + f(2015)$ 的值为()

A. 0 B. -5 C. 2 D. 5

6. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} (\frac{1}{2})^x, & x > 0 \\ -x^2 - 4x, & x \leq 0 \end{cases}$ 则此函数图象上关于原点对称的点有()

A. 0 对 B. 1 对 C. 2 对 D. 3 对

二、填空题（本大题共 3 小题，共 15.0 分）

7. 已知向量 $\overrightarrow{AB} = (m, 5)$ ， $\overrightarrow{AC} = (4, n)$ ， $\overrightarrow{BC} = (7, 6)$ ，则 $m+n$ 的值为_____.

8. 已知 α 为第二象限角，化简 $\frac{\sqrt{1+2\sin(5\pi-\alpha)\cos(\alpha-\pi)}}{\sin(\alpha-\frac{3}{2}\pi)-\sqrt{1-\sin^2(\frac{3}{2}\pi+\alpha)}} =$ _____.

9. 若关于 x 的方程 $\cos^2 x - \sin x + a = 0$ 在 $[0, \pi]$ 内有解，则实数 a 的取值范围是_____.

三、解答题（本大题共 3 小题，共 36.0 分）

10. 已知函数 $f(x) = 2\sqrt{3}\sin(2\omega x + \varphi)$ ，（ $\omega > 0$ ， $\varphi \in (0, \pi)$ ）的图象中相邻两条对称轴间的距离为 $\frac{\pi}{2}$ ，且点 $(-\frac{\pi}{4}, 0)$ 是它的一个对称中心.

(1) 求 $f(x)$ 的表达式，并求出 $f(x)$ 的单调递增区间.

(2) 若 $f(ax)$ ($a > 0$) 在 $(0, \frac{\pi}{3})$ 上是单调递减函数，求 a 的最大值.

11. 已知函数 $f(x) = \log_2(2^{2x} + 1) + ax$.

(1) 若 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，求实数 a 的值；

(2) 在 (1) 的条件下，若 $g(x) = f(x) - 2$ ，求函数 $g(x)$ 的零点.

12. 已知函数 $f(x) = 2^x, x \in R$.

(1) 当 m 取何值时方程 $|f(x) - 2| = m$ 有一个解? 两个解?

(2) 若不等式 $f^2(x) - 6f(x) - m > 0$ 在 R 上恒成立, 求 m 的取值范围.

答案和解析

1. 【答案】C

【解析】

【分析】

本题考查函数图象变换, 由图象变换法则求解即可.

【解答】

解: 函数 $f(x)=\sin 2x$ 的图象保持纵坐标不变, 先将横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$,

得到函数 $f(x)=\sin 4x$ 的图象,

再向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后,

得到函数 $g(x)=\sin[4(x-\frac{\pi}{6})]=\sin(4x-\frac{2\pi}{3})$ 的图象.

故选 C.

2. 【答案】B

【解析】

【分析】

本题主要考查幂函数的定义和性质应用, 属于基础题.

【解答】

解: 由于幂函数 $f(x)=(m^2-m-1)x^{m^2+m-3}$ 在 $(0, +\infty)$ 时是减函数,

$$\text{故有 } \begin{cases} m^2-m-1=1 \\ m^2+m-3<0 \end{cases},$$

解得 $m=-1$,

故选 B.

3. 【答案】C

【解析】

解: $f(x)$ 是分段函数, 根据 x 的正负写出分段函数的解析式, $f(x)=$,

$\therefore x>0$ 时, 图象与 $y=a^x$ 在第一象限的图象一样, $x<0$ 时, 图象与 $y=a^x$ 的图象关于 x 轴对称,

故选: C.

$f(x)$ 中含有 $|x|$, 故 $f(x)$ 是分段函数, 根据 x 的正负写出分段函数的解析式, 对照图象选择即可.

本题考查识图问题, 利用特值或转化为比较熟悉的函数, 利用图象变换或利用函数的性质是识图问题常用的方法.

4. 【答案】A

【解析】

【分析】

本题考查了函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象与性质, 利用函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的周期求出 ω , 再利用五点法作图法求出 φ 的值, 再利用函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 图象的对称性, 求得 $x_1+x_2=\frac{5\pi}{6}$, 可得 $f(x_1+x_2)$ 的值.

【解答】

解: 由函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ ($x\in\mathbb{R}$) ($\omega>0, |\varphi|<\frac{\pi}{2}$) 的部分图象,

可得 $\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}$, $\therefore\omega=2$.

再根据五点法作图可得: $2\cdot\frac{\pi}{6}+\varphi=0$, $\therefore\varphi=-\frac{\pi}{3}$,

因此 $f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$.

在 $x_1, x_2\in(\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3})$ 上, 且 $f(x_1)=f(x_2)$, 则 $\frac{1}{2}(x_1+x_2)=\frac{\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}}{2}$,

$\therefore x_1+x_2=\frac{5\pi}{6}$,

$f(x_1+x_2)=\sin(2\cdot\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3})=\sin\frac{4\pi}{3}=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,

故选 A.

5. 【答案】B

【解析】

解: $\because$ 函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数, $\therefore f(0)=0$,

由 $f(x+4)=-f(x)$ 得, $f(x+8)=-f(x+4)=f(x)$, 即函数的周期为 8,

$\therefore f(2012)=f(251\times 8+4)=f(4)=-f(0)=0$,

$f(2015)=f(251\times 8+7)=f(7)=f(-1)=-5$,

则 $f(2012)+f(2015)=-5$,

故选 B.

根据奇函数在原点有意义得 $f(0)=0$, 再由 $f(x+4)=-f(x)$ 求得函数的周期为 8, 利用周期性和条件分别把 $f(2012)$ 和 $f(2015)$ 进行转化, 直到求出函数值为止.

本题考查了函数周期性和奇偶性的应用, 根据周期函数的性质和奇偶性对应的关系式, 将所求的函数值对应自变量进行转化, 转化到已知范围内求解, 考查了转化思想.

6. 【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了基本初等函数: 二

次函数和对数函数图象的作法, 属

于中档题. 利用函数奇偶性, 作出图

象一侧关于原点对称图象, 再找交

点是解决本题的关键. 作出函数 $y=f$

(x) 的图象, 并且作出作出 $-y=f(-x)$,

即 $y=x^2-4x$ 关于原点对称的曲线 C,

观察函数, $y=f(x)$ 图象位于 y 轴右侧

(指数函数曲线) 与曲线 C 的交点的个数, 可以得出满足条件的对称点的对数.

【解答】

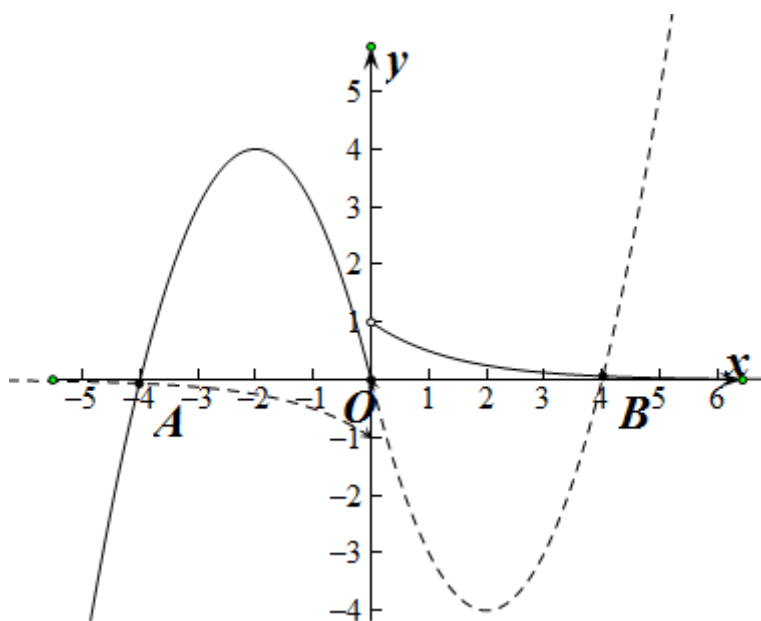
解: 作出函数 $y=f(x)$ 图象如图所示:

再作出 $-y=f(-x)$, 即 $y=x^2-4x$, 恰好与函数图象位于 y 轴左侧部分 (对数函数的图象) 关于原点对称, 记为曲线 C,

发现 $y=(\frac{1}{2})^x$ 与曲线 C 有且仅有一个交点,

因此满足条件的对称点只有一对, 图中的 A、B 就是符合题意的点.

故选 B.



7.【答案】8

【解析】

解： $\because$ 向量 $\overrightarrow{AB}=(m, 5)$, $\overrightarrow{AC}=(4, n)$, $\overrightarrow{BC}=(7, 6)$,

$$\therefore \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB},$$

$$\text{即 } (7, 6)=(4-m, n-5),$$

$$\therefore \begin{cases} 4-m=7 \\ n-5=6 \end{cases}, \text{解得 } m=-3, n=11,$$

$$\therefore m+n=8.$$

故答案为:8.

由 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$, 得 $(7, 6)=(4-m, n-5)$, 求出 $m=-3, n=11$, 由此能求出 $m+n$.

本题考查代数式的和的求法, 考查平面向量等基础知识, 考查运算求解能力, 考查函数与方程思想, 是基础题.

8.【答案】-1

【解析】

解： $\because \alpha$ 为第二象限角, $\therefore \sin \alpha > 0, \cos \alpha < 0$,

$$\text{则原式} = \frac{\sqrt{1-2\sin \alpha \cos \alpha}}{\cos \alpha - |\sin \alpha|} = \frac{|\sin \alpha - \cos \alpha|}{\cos \alpha - \sin \alpha} = -\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = -1.$$

故答案为:-1

原式利用诱导公式化简, 整理化简得到结果.

此题考查了诱导公式的作用, 以及三角函数的化简求值, 熟练掌握诱导公式是解本题的关键.

9.【答案】[-1, 1]

【解析】

解： $\because$ 方程 $\cos^2 x - \sin x + a = 0$, 即 $\sin^2 x + \sin x - a - 1 = 0$.

由于 $x \in [0, \pi]$, $\therefore 0 \leq \sin x \leq 1$.

故方程 $t^2 + t - a - 1 = 0$ 在 $[0, 1]$ 上有解.

又方程 $t^2 + t - a - 1 = 0$ 对应的二次函数 $f(t) = t^2 + t - a - 1$ 的对称轴为 $t = -\frac{1}{2}$,

故有 $f(0) \cdot f(1) \leq 0$, 即 $(a-1)(a+1) \leq 0$.

解得 $-1 \leq a \leq 1$.

故答案为: [-1, 1].

由题意可得方程 $t^2 + t - a - 1 = 0$ 在 $[-1, 1]$ 上有解, 函数 $f(t) = t^2 + t - a - 1$ 的对称轴为 $t = -\frac{1}{2}$, 故有 $f(0) \cdot f(1)$

≤ 0 , 解此不等式组求得 a 的取值范围.

本题主要考查同角三角函数的基本关系, 一元二次方程的根的分布与系数的关系, 体现了转化的数学思想.

10. 【答案】解: (1) 由题意函数 $f(x) = 2\sqrt{3}\sin(2\omega x + \varphi)$, ($\omega > 0$, $\varphi \in (0, \pi)$) 的图象中相邻两条对称轴间的距离为 $\frac{\pi}{2}$, 且点 $(-\frac{\pi}{4}, 0)$ 是它的一个对称中心, 得 $f(x)$ 的最小正周期为 π ,

$$\therefore T = \pi = \frac{2\pi}{2\omega} \therefore \omega = 1.$$

$$\therefore \text{函数 } f(x) = 2\sqrt{3}\sin(2x + \varphi),$$

又点 $(-\frac{\pi}{4}, 0)$ 是它的一个对称中心,

$$\therefore \sin(2(-\frac{\pi}{4}) + \varphi) = 0,$$

$$\because \varphi \in (0, \pi) \therefore \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

$$\therefore f(x) = 2\sqrt{3}\sin(2x + \frac{\pi}{2}) = 2\sqrt{3}\cos 2x,$$

$$\text{由 } 2k\pi + \pi \leq 2x \leq 2k\pi + 2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{得 } k\pi + \frac{\pi}{2} \leq x \leq k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\therefore f(x) \text{ 的单调递增区间为 } [k\pi + \frac{\pi}{2}, k\pi + \pi], k \in \mathbb{Z}.$$

$$(2) \text{ 因为 } f(ax) = 2\sqrt{3}\cos 2ax,$$

又 $f(ax)$ ($a > 0$) 在 $(0, \frac{\pi}{3})$ 上是单调递减函数,

$$\therefore \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2a}, \therefore a \leq \frac{3}{2},$$

即 a 的最大值为 $\frac{3}{2}$.

【解析】

(1) 求出函数的周期, 得到 ω , 利用函数的对称中心, 求出 φ , 得到函数的解析式, 利用余弦函数的单调性求解函数的单调减区间.

(2) 利用函数的单调区间, 列出不等式, 即可求出 a 的最大值.

本题考查函数的解析式的求法, 余弦函数的单调性的应用, 考查计算能力.

11. 【答案】(1) 解: $\because f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶函数.

$$\therefore f(-1) = f(1), \text{ 即 } \log_2 \frac{5}{4} - a = \log_2 5 + a,$$

$$\text{故 } a = \frac{\log_2 \frac{5}{4} - \log_2 5}{2} = \frac{\log_2 \frac{1}{4}}{2} = -1.$$

$$\text{函数 } f(x) = \log_2(2^{2x} + 2) - x,$$

$$f(-x) = \log_2(2^{-2x} + 2) - x = \log_2(2^{2x} + 2) - x = f(x).$$

所以 $a = -1$ 满足题意.

$$(2) \text{ 依题意 } g(x) = \log_2(2^{2x} + 1) - x - 2 = \log_2(2^{2x} + 1) - \log_2 2^{x+2}.$$

$$\text{则由 } 2^{2x} + 1 = 2^{x+2}, \text{ 得 } (2^x)^2 - 4(2^x) + 1 = 0,$$

$$\text{令 } 2^x = t \ (t > 0), \text{ 则 } t^2 - 4t + 1 = 0,$$

$$\text{解得 } t_1 = 2 - \sqrt{3}, \ t_2 = 2 + \sqrt{3}.$$

$$\text{即 } x_1 = \log_2(2 - \sqrt{3}), \ x_2 = \log_2(2 + \sqrt{3}).$$

$\therefore$ 函数 $g(x)$ 有两个零点, 分别为 $\log_2(2 - \sqrt{3})$ 和 $\log_2(2 + \sqrt{3})$.

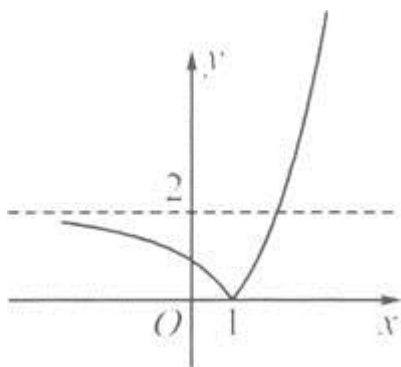
【解析】

(1) 利用偶函数的定义, 求解即可.

(2) 化简方程, 利用二次方程转化求解即可.

本题考查函数的零点的求法, 函数的奇偶性的性质的应用, 考查计算能力.

12. 【答案】解: (1) 令 $F(x) = |f(x) - 2| = |2^x - 2|$, $G(x) = m$, 画出 $F(x)$ 的图象如图所示,



由图象看出, 当 $m = 0$ 或 $m \geq 2$ 时, 函数 $F(x)$ 与 $G(x)$ 的图象只有一个交点, 原方程有一个解;

当 $0 < m < 2$ 时, 函数 $F(x)$ 与 $G(x)$ 的图象有两个交点, 原方程有两个解.

$$(2) \text{ 令 } f(x) = t \ (t > 0), \ H(t) = t^2 + t, \text{ 因为 } H(t) = (t + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} \text{ 在区间 } (0, +\infty) \text{ 上是增函数,}$$

$$\text{所以 } H(t) > H(0) = 0.$$

因此要使 $t^2 + t > m$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 应有 $m \leq 0$,

即所求 m 的取值范围为 $(-\infty, 0]$.

【解析】

(1) 利用数形结合法, 在同一坐标下中画出函数 $F(x) = |f(x) - 2| = |2^x - 2|$, $G(x) = m$ 的图象, 问题转化为两图象的交点问题, 即可得解;

(2) 设 $f(x) = t (t > 0)$, 则原不等式恒成立转化为函数 $H(t) = t^2 + t$ 在 $(0, +\infty)$ 上的最小值大于等于 m , 问题可解.