

2019 届高三 (上) 数学小题大赛 18.12.10

1. 同时抛掷两枚质地均匀的骰子(一种各面上分别标有 1,2,3,4,5,6 个点的正方体玩具),观察向上的点数,则两个点数之和不小于 4 的概率为_____.

2. 底面边长为 2,高为 1 的正四棱锥的侧面积为_____.

3. 在平面直角坐标系 xOy 中,以直线 $y = \pm 2x$ 为渐近线,且经过抛物线 $y^2 = 4x$ 焦点的双曲线的方程为_____.

4. 在平面直角坐标系 xOy 中,记曲线 $y = 2x - \frac{m}{x} (m \in \mathbb{R}, m \neq -2)$ 在 $x=1$ 处的切线为直线 l .

若直线 l 在两坐标轴上的截距之和为 12,则 m 的值为_____.

5. 已知焦点在 x 轴上的双曲线的渐近线方程为 $y = \pm \frac{1}{3}x$,则双曲线的离心率为_____.

6. 设 $x \in \{-1, 1\}, y \in \{-2, 0, 2\}$,则以 (x, y) 为坐标的点落在不等式 $x + 2y \geq 1$ 所表示的平面区域内的概率为_____.

7. 将函数 $y = \sqrt{3}\cos x + \sin x (x \in \mathbb{R})$ 的图象向左平移 $m (m > 0)$ 个单位长度后,所得到的图象关于 y 轴对称,则 m 的最小值是_____.

8. 已知菱形 $ABCD$ 的边长为 2, $\angle BAD = 120^\circ$,点 E, F 分别在边 BC, DC 上,且 $\overrightarrow{BE} = \lambda \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CF} = \lambda \overrightarrow{CD}$.

若 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BF} = -1$,则 $\lambda =$ _____.

9. 已知正实数 a, b 满足 $9a^2 + b^2 = 1$,则 $\frac{ab}{3a+b}$ 的最大值为_____.

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=1$,前 n 项的和为 S_n ,且满足 $2a_{n+1}+S_n=2(n \in \mathbb{N}^*)$,

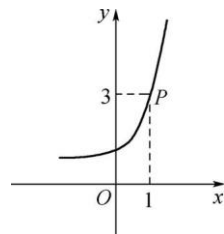
则满足 $\frac{1001}{1000} < \frac{S_{2n}}{S_n} < \frac{11}{10}$ 的 n 的最大值为_____.

11. 已知点 $A(0,2)$ 为圆 $M: x^2+y^2-2ax-2ay=0(a>0)$ 外一点,圆 M 上存在点 T 使得 $\angle MAT=45^\circ$;
则实数 a 的取值范围是_____.

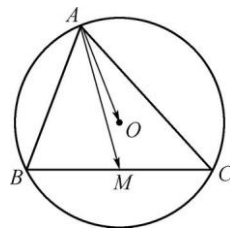
12. 已知函数 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$,若 $y=f(x-\varphi)\left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 是偶函数,则 $\varphi=$ _____.

13. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中,已知首项 $a_1>0$,公差 $d>0$.若 $a_1+a_2\leq 60, a_2+a_3\leq 100$,
则 $5a_1+a_5$ 的最大值为_____.

14. 如图,已知函数 $y=a^x+b(b>0)$ 的图象经过点 $P(1,3)$,则 $\frac{4}{a-1}+\frac{1}{b}$ 的最小值为_____.



15. 如图,圆 O 内接于 $\triangle ABC$ 中, M 是 BC 的中点, $AC=3$.若 $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AM}=4$,则 $AB=$ _____.



16. 以抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为顶点,顶点为中心,离心率为2的双曲线的标准方程是_____.

17. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,且 $a_n=4+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,若对任意 $n \in \mathbb{N}^*$,都有 $1 \leq p(S_n-4n) \leq 3$ 成立,

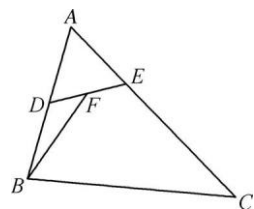
则实数 p 的取值范围是_____.

18. 已知函数 $f(x)=\lg\left(1-\frac{a}{2^x}\right)$ 的定义域为 $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$,那么实数 a 的值为_____.

19. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,若 $S_3=7, S_6=63$,则 $a_7+a_8+a_9=$ _____.

20. 如图,在 $\triangle ABC$ 中,已知 $AB=4, AC=6, \angle BAC=60^\circ$; 点 D, E 分别在边 AB, AC 上,

且 $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AE}$, 点 F 是 DE 的中点, 则 $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{DE}$ 的值为_____.



21. 已知函数 $f(x)=|2^x-2| (x \in (-1, 2))$, 则函数 $y=f(x-1)$ 的值域为_____.

22. 已知向量 $a=(1,1), b=(-1,1)$, 设向量 c 满足 $(2a-c) \cdot (3b-c)=0$, 则 $|c|$ 的最大值为_____.

23. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q (0 < q < 1)$, 前 n 项和为 S_n , 若 $a_1=4a_3a_4$, 且 a_6 与 $\frac{3}{4}a_4$ 的等差中项为 a_5 ,

则 $S_6=_____$.

24. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} 4, & x \geq m, \\ x^2 + 4x - 3, & x < m. \end{cases}$ 若函数 $g(x)=f(x)-2x$ 恰有三个不同的零点,

则实数 m 的取值范围是_____.

25. 已知圆 $M: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$, 直线 $l: x+y-6=0$, A 为直线 l 上一点.

若圆 M 上存在两点 B, C , 使得 $\angle BAC=60^\circ$; 则点 A 横坐标的取值范围是_____.

2019 届高三（上）数学填空题大赛(一试)

1. $\frac{31}{36}$ 【解析】设两枚骰子组成的数组为 (m, n) , 则基本事件共有 36 个, 点数之积小于 4 的是

$(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (3, 1)$, 共 5 个, 根据对立事件知, 所求概率为 $1 - \frac{5}{36} = \frac{31}{36}$.

2. $4\sqrt{2}$ 【解析】由题意知, 正四棱锥的斜高 $h' = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, 所以侧面积 $S = 4 \times \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.

3. $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ 【解析】因为抛物线的焦点坐标为 $(1, 0)$, 可设双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. 由题意知 $a = 1, \frac{b}{a} = 2$, 所以 $b = 2$,

故所求双曲线的方程为 $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$.

4. -3 或 -4 【解析】由 $y = 2x - \frac{m}{x}$, 知 $y' = 2 + \frac{m}{x^2}$, 所以曲线在 $x = 1$ 处的切线的斜率为 $2 + m$, 切线方程为

$y - (2 - m) = (2 + m)(x - 1)$. 所以切线交 x 轴于 $(\frac{2m}{m+2}, 0)$, 交 y 轴于 $(0, -2m)$, 由题设知, $\frac{2m}{m+2} - 2m = 12$, 整理得 $m^2 + 7m + 12 = 0$,

解得 $m = -3$ 或 -4 .

5. $\frac{\sqrt{10}}{3}$

6. $\frac{1}{2}$ 【解析】由题意知, 总的基本事件有 6 个, 符合条件的点有 3 个, 分别是 $(-1, 2), (1, 2), (1, 0)$, 所以

$$P(x + 2y \geq 1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

7. $\frac{\pi}{6}$

8. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 【解析】因为 $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \lambda \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BF} = -\lambda \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BF} = -\lambda \overrightarrow{AB}^2 + (1 - \lambda^2) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \lambda \overrightarrow{AD}^2 = -2(1 - \lambda^2) = -1$, 又因为 $\lambda \in$

$(0, 1)$, 所以 $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

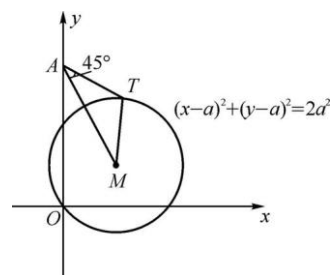
9. $\frac{\sqrt{2}}{12}$

10. 9

11. $[\sqrt{3}-1, 1)$ 【解析】如图, 因为点 A 在圆外, 所以 $0^2 + 2^2 - 0 - 4a > 0$, 所以 $a < 1$. 又 $\triangle AMT$ 有解, 则 $\frac{MT}{\sin 45^\circ} = \frac{AM}{\sin \angle ATM}$, 所

以 $AM = 2a \sin \angle ATM \leq 2a$, 所以 $a^2 + (a-2)^2 \leq 4a^2$, 整理得 $a^2 + 2a - 2 \geq 0$, 在正数范围内, 解得 $a \geq \sqrt{3}-1$, 故实数 a 的取值范

围是 $[\sqrt{3}-1, 1)$.



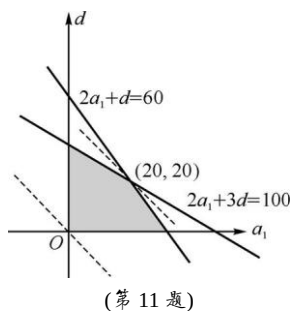
12. $\frac{\pi}{3}$

13. 200 【解析】方法一: $a_1 + a_2 = 2a_1 + d \leq 60, a_2 + a_3 = 2a_1 + 3d \leq 100$, 所以

$5a_1 + a_5 = 6a_1 + 4d = \frac{5}{2}(2a_1 + d) + \frac{1}{2}(2a_1 + 3d) \leq 150 + 50 = 200$, 即所求最大值为 200.

方法二: 以 a_1, d 为变量作出不等式组 $\begin{cases} a_1 > 0, d > 0, \\ 2a_1 + d \leq 60, \\ 2a_1 + 3d \leq 100 \end{cases}$ 表示的可行域如图中阴影部分所示, 设目标函数 $z = 6a_1 + 4d$.

将最优解 $(20, 20)$ 代入, 得 z 的最大值为 200.

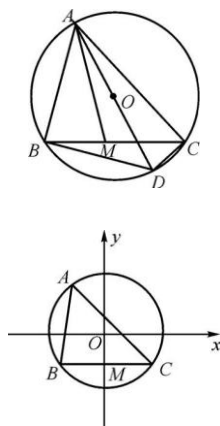


14. $\frac{9}{2}$

15. $\sqrt{7}$ 【解析】方法一: 如图(1), 延长 AO 与圆交于点 D , 连接 DB, DC , 则 $\angle DBA = \angle DCA = 90^\circ$. 又 M 为 BC 中

点, 所以 $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AM} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{4} \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4} \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AB}^2 + \frac{1}{4} \overrightarrow{AC}^2 = \frac{1}{4} AB^2 + \frac{1}{4} AC^2$, 所以 $AB^2 + AC^2 = 16$, 因为 $AC = 3$,

所以 $AB = \sqrt{7}$.



方法二: 以 O 为原点, 平行于 BC 方向的直线作 x 轴建立平面直角坐标系如图(2)所示. 设

$A(x_1, y_1), B(-x_2, y_2), C(x_2, y_2), M(0, y_2)$, 且 $x_1^2 + y_1^2 = r^2$ ①,

$x_2^2 + y_2^2 = r^2$ ②. 由 $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AM} = 4$, 得 $x_1^2 + y_1^2 - y_1 y_2 = 4$, 得 $y_1 y_2 = r^2 - 4$ ③.

由 $AC=3$, 得 $(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=9$. ④, 设 $AB=m$, 则 $(x_2+x_1)^2+(y_2-y_1)^2=m^2$ ⑤, ④+⑤得

$2x_1^2+2x_2^2+2y_1^2+2y_2^2-4y_1y_2=m^2+9$. 将 ①②③代入得 $4r^2-4(r^2-4)=m^2+9$, 即 $m^2=7$, 所以 $m=\sqrt{7}$.

方法三: 设圆半径为 r , 则 $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AO} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2} \overrightarrow{AO} \cdot (2\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AO} - \frac{1}{2} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} - \frac{1}{2} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$.

$$\overrightarrow{OC} = r^2 - \frac{1}{2} r^2 \cos \angle AOB - \frac{1}{2} r^2 \cos \angle AOC = r^2 - \frac{1}{2} r^2 \cos 2C - \frac{1}{2} r^2 \cos$$

$$2B = r^2 - \frac{1}{2} r^2 (2 - 2\sin^2 C - 2\sin^2 B) = r^2 (\sin^2 C + \sin^2 B) = \frac{1}{4} (AB^2 + AC^2) = \frac{1}{4} (AB^2 + 9) = 4, \text{ 所以 } AB = \sqrt{7}.$$

16. $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 【解析】在抛物线 $y^2 = 4x$ 中, 焦点为 $(1, 0)$, 所以在双曲线中, $a = 1$. 由 $\frac{c}{a} = 2$, 得 $c = 2$, 所以 $b^2 = c^2 - a^2 = 3$,

故所求双曲线的标准方程为 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$.

17. $2 \leq p \leq 3$ 【解析】由题意知 $1 \leq p \leq \frac{2}{3} \left[1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right] \leq 3$ 对 $n \in \mathbb{N}^*$ 恒成立, 则 $p \leq \left(\frac{9}{2 \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right]} \right)_{\min} = \frac{9}{2 \times \frac{3}{2}} = 3$, 且

$$p \geq \left(\frac{3}{2 \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right]} \right)_{\max} = \frac{3}{2 \times \frac{3}{4}} = 2, \text{ 所以 } 2 \leq p \leq 3.$$

18. $\sqrt{2}$ 【解析】令 $1 - \frac{a}{2^x} > 0$, 则 $2^x > a$, 由题意知其解为 $x > \frac{1}{2}$, 则 $\log_2 a = \frac{1}{2}$, 解得 $a = \sqrt{2}$.

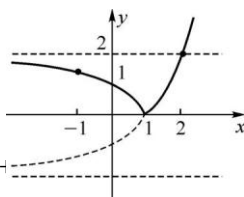
19. 448 【解析】方法一: 设等比数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 , 公比为 q , 由题知 $q \neq 1$, 所以 $\frac{a_1(1-q^3)}{1-q} = 7, \frac{a_1(1-q^6)}{1-q} = 63$,

解得 $q = 2, a_1 = 1$, 所以 $a_7 + a_8 + a_9 = a_1 q^6 + a_1 q^7 + a_1 q^8 = 448$.

20. 4 【解析】由题意知, $AD = 2, AE = 2, \angle BAC = 60^\circ$, 所以 $\triangle ADE$ 为正三角形, 则 $BD = 2, DF = 1, \angle BDF = 120^\circ$, 所

$$\text{以 } \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{DE} = (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DF}) \cdot 2\overrightarrow{DF} = 2(\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{DF}^2) = 2(1 + 1) = 4.$$

21. $[0, 2)$ 【解析】作出 $f(x) = |2^x - 2|$ 的图象如图所示. 当 $x \in (-1, 2)$ 时, $f(x)$ 的值域为 $[0, 2)$. 对 $y = f(x-1)$ 可理解为将函数 $y = f(x)$ 的图象向右平移 1 个单位长度. 而左右平移时, 函数值域不变, 故函数 $y = f(x-1)$ 的值域也是 $[0, 2)$.



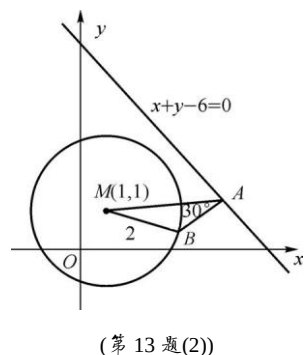
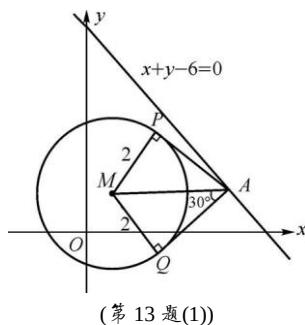
22. $\sqrt{26}$ 【解析】由 $(2a-c)(3b-c) = 0$, 得 $6a - b - (2a - c)(3b - c) = 0$, 设向量 $(-1, 5)$ 与 c 夹角为 θ , 则

$$|c|^2 - \sqrt{26}|c| \cos \theta = 0, \text{ 所以 } |c| = 0 \text{ 或 } |c| = \sqrt{26} \cos \theta, \text{ 所以 } |c| \text{ 的最大值为 } \sqrt{26}.$$

23. $\frac{63}{4}$ 【解析】因为 a_6 与 $\frac{3}{4}a_4$ 的等差中项为 a_5 , 所以 $a_6 + \frac{3}{4}a_4 = 2a_5$, 所以 $a_1q^5 + \frac{3}{4}a_1q^3 = 2a_1q^4$, 所以 $4q^2 - 8q + 3 = 0$, 解得 $q = \frac{1}{2}$ 或 $q = \frac{3}{2}$ (舍去), 代入 $a_1 = 4a_3a_4$, 求得 $a_1 = 8$, 故 $S_6 = \frac{8(1 - \frac{1}{2^6})}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{63}{4}$.

24. (1, 2] 【解析】由题意知, 方程 $f(x) = 2x$ 有三个不同的解, 易知函数 $f(x) = x^2 + 4x - 3 (x < m)$ 与 $y = 2x$ 有两个不同的交点; $f(x) = 4 (x \geq m)$ 与 $y = 2x$ 有一个交点. 令 $x^2 + 4x - 3 = 2x$, 解得 $x_1 = -3, x_2 = 1$; 令 $2x = 4$, 解得 $x = 2$, 易知 $\begin{cases} m > 1, \\ m \leq 2, \end{cases}$ 所以实数 m 的取值范围是 $(1, 2]$.

25. [1, 5] 【解析】方法一: 自点 A 向圆作两条切线 AP, AQ , 原题转化为 $\angle PAQ \geq 60^\circ$. 如图(1), 易知 $\angle MAQ \geq 30^\circ$, 所以 $\sin \angle MAQ = \frac{2}{MA-2} \geq \frac{1}{2}$, 所以 $MA \leq 4$. 设 $A(x, 6-x), M(1, 1)$, 则 $(x-1)^2 + (6-x-1)^2 \leq 16$, 解得 $1 \leq x \leq 5$, 故所求取值范围为 $[1, 5]$.



方法二: 如图(2), 圆周上存在点 B 使得 $\angle MAB = 30^\circ$; 即符合题意. 由正弦定理得 $\frac{2}{\sin 30^\circ} = \frac{MA}{\sin \angle MBA}$, 得 $MA = 4 \sin \angle MBA \leq 4$, 以下同方法一.