

南师附中 2019 届高三年级模拟考试

数学参考答案及评分标准

一、填空题（本大题共 14 小题，每小题 5 分，计 70 分. 不需写出解答过程，请把答案写在答题纸的指定位置上）

1. $\{0, 1\}$ 2. -3 3. 18 4. $\frac{1}{3}$ 5. $[0, 1)$
6. 3 7. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 8. -13 9. $-\sqrt{2}$ 10. 18
11. $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ 12. $(6, 3)$ 13. $20, 21$ 14. $\{-6\}$

二、解答题（本大题共 6 小题，计 90 分. 解答应写出必要的文字说明，证明过程或演算步骤，请把答案写在答题纸的指定区域内）

15. (本小题满分 14 分)

解：因为锐角 α 的终边与单位圆交于点 A ，点 A 的纵坐标是 $\frac{\sqrt{10}}{10}$ ，

所以由任意角的三角函数的定义可知， $\sin \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

从而 $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ 3 分

$$\begin{aligned} (1) \text{ 于是 } \cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{4}\right) &= \cos \alpha \cos \frac{3\pi}{4} + \sin \alpha \sin \frac{3\pi}{4} \\ &= \frac{3\sqrt{10}}{10} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{10}}{10} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{5}. \end{aligned} \quad \text{..... 6 分}$$

(2) 因为钝角 β 的终边与单位圆交于点 B ，且点 B 的横坐标是 $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ，

所以 $\cos \beta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ ，从而 $\sin \beta = -\sqrt{1 - \cos^2 \beta} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 8 分

于是 $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$

$$= \frac{\sqrt{10}}{10} \times \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) + \frac{3\sqrt{10}}{10} \times \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}. \quad \text{..... 10 分}$$

因为 α 为锐角， β 为钝角，所以 $\alpha + \beta \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, 12 分

从而 $\alpha + \beta = \frac{3\pi}{4}$ 14 分

16. (本小题满分 14 分)

解: (1) 设 $AC \cap BD = O$, 连结 OE ,

$\because$ 四边形 $ACEF$ 是矩形, $\therefore EF \parallel AC, EF = AC$.

$\because O$ 是正方形 $ABCD$ 对角线的交点,

$\therefore O$ 是 AC 的中点.

又 $\because M$ 是 EF 的中点, $\therefore EM \parallel AO, EM = AO$.

$\therefore$ 四边形 $AOEM$ 是平行四边形,

$\therefore AM \parallel OE$4 分

$\because OE \subset$ 平面 $BDE, AM \not\subset$ 平面 BDE ,

$\therefore AM \parallel$ 平面 BDE 7 分

(2) $\because$ 正方形 $ABCD, \therefore BD \perp AC$.

$\because$ 平面 $ABCD \cap$ 平面 $ACEF = AC$, 平面 $ABCD \perp$ 平面 $ACEF, BD \subset$ 平面 $ABCD$,

$\therefore BD \perp$ 平面 $ACEF$9 分

$\because AM \subset$ 平面 $ACEF, \therefore BD \perp AM$10 分

$\because$ 正方形 $ABCD, AD = \sqrt{2}, \therefore OA = 1$.

由 (1) 可知点 M, O 分别是 EF, AC 的中点, 且 $ACEF$ 是矩形,

又 $\because AF = 1, \therefore AOMF$ 是正方形,11 分

$\therefore AM \perp OF$12 分

又 $AM \perp BD$, 且 $OF \cap BD = O, OF \subset$ 平面 $BDF, BD \subset$ 平面 BDF ,

$\therefore AM \perp$ 平面 BDF14 分

17. (本小题满分 14 分)

解: (1) 连 PC . 由条件得 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$.

在三角形 POC 中, $OC = 10, OP = 20, \angle POC = \pi - 2\theta$, 由余弦定理, 得

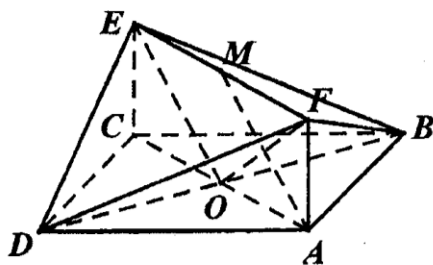
$$PC^2 = OC^2 + OP^2 - 2OC \cdot OP \cos(\pi - 2\theta) = 100(5 + 4\cos 2\theta), \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

因为 PQ 与半圆 C 相切于 Q , 所以 $CQ \perp PQ$,

所以 $PQ^2 = PC^2 - CQ^2 = 400(1 + \cos 2\theta)$, 所以 $PQ = 20\sqrt{2}\cos\theta$4 分

所以四边形 $COPQ$ 的周长为

$$f(\theta) = CO + OP + PQ + QC = 40 + 20\sqrt{2}\cos\theta.$$



即 $f(\theta) = 40 + 20\sqrt{2}\cos\theta$, $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$7 分

(没写定义域, 扣 2 分)

(2) 设四边形 $COPQ$ 的面积为 $S(\theta)$, 则

$S(\theta) = S_{\triangle OCP} + S_{\triangle OQP} = 100(\sqrt{2}\cos\theta + 2\sin\theta\cos\theta)$, $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$10 分

所以 $S'(\theta) = 100(-\sqrt{2}\sin\theta + 2\cos^2\theta - 2\sin^2\theta) = 100(-4\sin^2\theta - \sqrt{2}\sin\theta + 2)$, $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$.

.....12 分

令 $S'(\theta) = 0$, 得 $\sin\theta = \frac{\sqrt{34}-\sqrt{2}}{8}$.

列表:

$\sin\theta$	$(0, \frac{\sqrt{34}-\sqrt{2}}{8})$	$\frac{\sqrt{34}-\sqrt{2}}{8}$	$(\frac{\sqrt{34}-\sqrt{2}}{8}, 1)$
$S'(\theta)$	+	0	-
$S(\theta)$	增	最大值	减

答: 要使改建成的展示区 $COPQ$ 的面积最大, $\sin\theta$ 的值为 $\frac{\sqrt{34}-\sqrt{2}}{8}$14 分

18. (本小题满分 16 分)

解: (1) 依题意, $2a = a = 2$, $\therefore c = 1$, $b = \sqrt{3}$.

所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$4 分

(2) ① 因为直线 l 分别与直线 $x = -4$ 和直线 $x = -1$ 相交,

所以, 直线 l 一定存在斜率.6 分

② 设直线 $l: y = kx + m$,

由 $\begin{cases} y = kx + m, \\ 3x^2 + 4y^2 = 12, \end{cases}$ 得 $(4k^2 + 3)x^2 + 8kmx + 4(m^2 - 3) = 0$,

由 $\Delta = (8km)^2 - 4 \times (4k^2 + 3) \times 4(m^2 - 3) = 0$,

得 $4k^2 + 3 - m^2 = 0$. ①8 分

把 $x = -4$ 代入 $y = kx + m$, 得 $M(-4, -4k + m)$,

把 $x = -1$ 代入 $y = kx + m$, 得 $N(-1, -k + m)$,10 分

所以 $|NF_1| = |-k + m|$,

$|MF_1| = \sqrt{(-4 + 1)^2 + (-4k + m)^2} = \sqrt{9 + (-4k + m)^2}$, ②12 分

由①式, 得 $3 = m^2 - 4k^2$, ③

把③式代入②式, 得 $|MF_1| = \sqrt{4(k - m)^2} = 2|-k + m|$,

$$\therefore \frac{|NF_1|}{|MF_1|} = \frac{|k-m|}{2|k-m|} = \frac{1}{2}, \text{ 即 } \frac{|NF_1|}{|MF_1|} \text{ 为定值 } \frac{1}{2}. \quad \dots\dots\dots 16 \text{ 分}$$

19. (本小题满分 16 分)

解: 解: (1) ① $a_1 = 2^{\frac{1 \times 2}{2}} = 2;$ 2 分

$$\text{② 当 } n \geq 2 \text{ 时, } a_n = \frac{a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n}{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}} = \frac{2^{\frac{n+1}{2}}}{2^{\frac{(n-1)n}{2}}} = 2^n.$$

所以, 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2^n (n \in \mathbf{N}^*)$4 分

(2) 由 $S_n = \frac{n(b_1 + b_n)}{2}$, 得 $2S_n = n(b_1 + b_n)$, ①

$$\text{所以 } 2S_{n-1} = (n-1)(b_1 + b_{n-1}), \quad n \geq 2. \quad \text{②}$$

由②-①, 得 $2b_n = b_1 + nb_n - (n-1)b_{n-1}, \quad n \geq 2,$

即 $b_1 + (n-2)b_n - (n-1)b_{n-1} = 0, \quad n \geq 2, \quad \text{③}$

所以, $b_1 + (n-3)b_n - (n-2)b_{n-1} = 0, \quad n \geq 3. \quad \text{④}$

由④-③, 得 $(n-2)b_n - 2(n-2)b_{n-1} + (n-2)b_{n-2} = 0, \quad n \geq 3, \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

因为 $n \geq 3$, 所以 $n-2 > 0$, 上式同除以 $(n-2)$, 得

$$b_n - 2b_{n-1} + b_{n-2} = 0, \quad n \geq 3,$$

即 $b_{n+1} - b_n = b_n - b_{n-1} = \cdots = b_2 - b_1 = 1,$

所以, 数列 $\{b_n\}$ 为首项为 1, 公差为 1 的等差数列,

故 $b_n = n, \quad n \in \mathbf{N}^*. \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

(3) 因为 $c_n = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{b_n \cdot b_{n+1}} = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} \left[\frac{n(n+1)}{2^n} - 1 \right]. \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

所以 $c_1 = 0, \quad c_2 > 0, \quad c_3 > 0, \quad c_4 > 0, \quad c_5 < 0.$

记 $f(n) = \frac{n(n+1)}{2^n},$

$$\text{当 } n \geq 5 \text{ 时, } f(n+1) - f(n) = \frac{(n+1)(n+2)}{2^{n+1}} - \frac{n(n+1)}{2^n} = -\frac{(n+1)(n-2)}{2^{n+1}} < 0,$$

所以, 当 $n \geq 5$ 时, 数列 $f(n)$ 为单调递减, 当 $n \geq 5$ 时, $f(n) < f(5) < \frac{5 \times 6}{2^5} < 1.$

从而, 当 $n \geq 5$ 时, $c_n = \frac{1}{n(n+1)} \left[\frac{n(n+1)}{2^n} - 1 \right] < 0. \quad \dots\dots\dots 14 \text{ 分}$

因此 $T_1 < T_2 < T_3 < T_4, \quad T_4 > T_5 > T_6 > \cdots.$

所以, 对任意的 $n \in \mathbf{N}^*, \quad T_4 \geq T_n.$

综上, $m = 4. \quad \dots\dots\dots 16 \text{ 分}$

(注: 其它解法酌情给分.)

20. (本小题满分 16 分)

解: (1) 当 $a < 0$ 时, 因为 $f'(x) = a(x+1)e^x$, 当 $x < -1$ 时, $f'(x) > 0;$

当 $x > -1$ 时, $f(x) < 0$, 所以函数 $f(x)$ 单调减区间为 $(-\infty, -1)$; 单调增区间为 $(-1, +\infty)$2 分

(2) 由 $f(x) \geq 2x^2 + bx$, 得 $axe^x \geq 2x^2 + bx$, 由于 $x > 0$,

所以 $ae^x \geq 2x + b$ 对任意的 $a \geq 1$ 及任意的 $x > 0$ 恒成立,

由于 $e^x > 0$, 所以 $ae^x \geq e^x$, 所以 $e^x - 2x \geq b$ 对任意的 $x > 0$ 恒成立,4 分

设 $\varphi(x) = e^x - 2x$, $x > 0$,

则 $\varphi'(x) = e^x - 2$, 所以函数 $\varphi(x)$ 在 $(0, \ln 2)$ 上单调递减, 在 $(\ln 2, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $\varphi(x)_{\min} = \varphi(\ln 2) = 2 - 2\ln 2$,

所以 $b \leq 2 - 2\ln 2$6 分

(3) 由 $h(x) = axe^x + x + \ln x$, 得 $h'(x) = a(x+1)e^x + 1 + \frac{1}{x} = \frac{(x+1)(ae^x + 1)}{x}$, 其中 $x > 0$.

①若 $a \geq 0$ 时, 则 $h'(x) > 0$, 所以函数 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以函数 $h(x)$ 至多有一个零点, 不合题意;8 分

②若 $a < 0$ 时, 令 $h'(x) = 0$, 得 $xe^x = -\frac{1}{a} > 0$.

由第(2)小题, 知: 当 $x > 0$ 时, $\varphi(x) = e^x - 2x \geq 2 - 2\ln 2 > 0$, 所以 $e^x \geq 2x$, 所以 $xe^x > 2x^2$, 所以当 $x > 0$ 时, 函数 xe^x 的值域为 $(0, +\infty)$.

所以, 存在 $x_0 > 0$, 使得 $ax_0e^{x_0} + 1 = 0$, 即 $ax_0e^{x_0} = -1$, ①

且当 $x < x_0$ 时, $h'(x) > 0$, 所以函数 $h(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递增, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递减. 因为函数有两个零点 x_1, x_2 ,

所以 $h(x)_{\max} = h(x_0) = ax_0e^{x_0} + x_0 + \ln x_0 = -1 + x_0 + \ln x_0 > 0$. ②

设 $\varphi(x) = -1 + x + \ln x$, $x > 0$, 则 $\varphi'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$, 所以函数 $\varphi(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增, 由于 $\varphi(1) = 0$, 所以当 $x > 1$ 时, $\varphi(x) > 0$. 所以, ②式中的 $x_0 > 1$,

又由①式, 得 $x_0e^{x_0} = -\frac{1}{a}$.

由第(1)小题可知, 当 $a < 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $-\frac{1}{a} \geq e$,

即 $a \in (-\frac{1}{e}, 0)$11 分

当 $a \in (-\frac{1}{e}, 0)$ 时,

(i) 由于 $h(\frac{1}{e}) = \frac{ae^{\frac{1}{e}}}{e} + (\frac{1}{e} - 1) < 0$, 所以 $h(\frac{1}{e}) \cdot h(x_0) < 0$, 又因为 $\frac{1}{e} < 1 < x_0$, 且函数

$h(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减, 函数 $h(x)$ 的图象在 $(0, x_0)$ 上不间断, 所以函数 $h(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上恰有一个零点;13 分

(ii) 由于 $h(-\frac{1}{a}) = -e^{-\frac{1}{a}} - \frac{1}{a} + \ln(-\frac{1}{a})$, 令 $t = -\frac{1}{a} > e$,

设 $F(t) = -e^t + t + \ln t$, $t > e$,

由于 $t > e$ 时, $\ln t < t$, $e^t > 2t$, 所以设 $F(t) < 0$, 即 $h(-\frac{1}{a}) < 0$.

由①式, 得, 当 $x_0 > 1$ 时, $-\frac{1}{a} = x_0 e^{x_0} > x_0$, 且 $h(-\frac{1}{a}) \cdot h(x_0) < 0$, 同理可得函数

$h(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 上也恰有一个零点.

综上, $a \in (-\frac{1}{e}, 0)$.

.....16 分

数学附加题参考答案及评分标准

21. 【选做题】在 A、B、C 三小题中只能选做 2 题, 每小题 10 分, 共计 20 分. 请在答题

卡指定区域内作答. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

A. 选修 4—2: 矩阵与变换

解: (1) 由题意, 由矩阵的逆矩阵公式得 $B = A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$,5 分

(2) 矩阵 B 的特征多项式 $f(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 1)$,7 分

令 $f(\lambda) = 0$, 解得 $\lambda = 1$ 或 -1 ,9 分

所以矩阵 B 的特征值为 1 或 -110 分

B. 选修 4—4: 坐标系与参数方程

解: 将圆 $\rho = 2a \sin \theta$ 化成普通方程为 $x^2 + y^2 = 2ay$, 整理得 $x^2 + (y - a)^2 = a^2$3 分

将直线 $\rho \cos(\theta + \frac{\pi}{4}) = 1$ 化成普通方程为 $x - y - \sqrt{2} = 0$6 分

因为相切, 所以圆心到直线的距离等于半径, 即 $\frac{|a + \sqrt{2}|}{\sqrt{2}} = a$ 9 分

解得 $a = 2 + \sqrt{2}$10 分

C. 选修 4—5: 不等式选讲

解: 因为 $(\sqrt{1-x} + \sqrt{3x+2})^2 = (\sqrt{3-3x} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{3x+2} \cdot \sqrt{1})^2$

$\leq (3-3x+3x+2)(\frac{1}{3}+1) = \frac{20}{3}$,3 分

所以 $y = \sqrt{1-x} + \sqrt{3x+2} \leq \frac{2\sqrt{15}}{3}$5 分

等号当且仅当 $\frac{3-3x}{\frac{1}{3}} = \frac{3x+2}{1}$, 即 $x = \frac{7}{12} \in [-\frac{2}{3}, 1]$ 时成立.8 分

所以 y 的最大值为 $\frac{2\sqrt{15}}{3}$10 分

22. (本小题满分 10 分)

解: (1) 因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 且 $AB, AD \subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $PA \perp AB$, $PA \perp AD$,

又因为 $\angle BAD = 90^\circ$, 所以 PA, AB, AD 两两互相垂直.

分别以 AB, AD, AP 为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系,

则由 $AD = 2AB = 2BC = 4$, $PA = 4$ 可得

$A(0,0,0)$, $B(2,0,0)$, $C(2,2,0)$, $D(0,4,0)$, $P(0,0,4)$,

又因为 M 为 PC 的中点, 所以 $M(1,1,2)$.

所以 $\overrightarrow{BM} = (-1, 1, 2)$, $\overrightarrow{AP} = (0, 0, 4)$,2 分

所以 $\cos \langle \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{BM} \rangle = \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BM}}{|\overrightarrow{AP}| |\overrightarrow{BM}|}$

$= \frac{0 \times (-1) + 0 \times 1 + 4 \times 2}{4 \times \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$,4 分

所以异面直线 AP , BM 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$5 分

(2) 因为 $AN = \lambda$, 所以 $N(0, \lambda, 0)$ ($0 \leq \lambda \leq 4$), 则 $\overrightarrow{MN} = (-1, \lambda - 1, -2)$,

$\overrightarrow{BC} = (0, 2, 0)$, $\overrightarrow{PB} = (2, 0, -4)$,

设平面 PBC 的法向量为 $m = (x, y, z)$,

则 $\begin{cases} m \cdot \overrightarrow{BC} = 0, \\ m \cdot \overrightarrow{PB} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 2y = 0, \\ 2x - 4z = 0. \end{cases}$ 令 $x = 2$, 解得 $y = 0$, $z = 1$,

所以 $m = (2, 0, 1)$ 是平面 PBC 的一个法向量.7 分

因为直线 MN 与平面 PBC 所成角的正弦值为 $\frac{4}{5}$,

所以 $|\cos \langle \overrightarrow{MN}, m \rangle| = \frac{|\overrightarrow{MN} \cdot m|}{|\overrightarrow{MN}| |m|} = \frac{|-2 - 2|}{\sqrt{5 + (\lambda - 1)^2} \cdot \sqrt{5}} = \frac{4}{5}$,

解得 $\lambda = 1 \in [0, 4]$,

所以 λ 的值为 1.10 分

23. (本小题满分 10 分)

解: (1) $L(1)=2$ 1 分
 $L(2)=6,$ 2 分
 $L(3)=20,$ 3 分

(2) 设 m 为沿 x 轴正方向走的步数 (每一步长度为 1), 则反方向也需要走 m 步才能回到 y

轴上, 所以 $m=0, 1, 2, \dots, [\frac{n}{2}]$, (其中 $[\frac{n}{2}]$ 为不超过 $\frac{n}{2}$ 的最大整数)

总共走 n 步, 首先任选 m 步沿 x 轴正方向走, 再在剩下的 $n-m$ 步中选 m 步沿 x 轴负方向走, 最后剩下的每一步都有两种选择 (向上或向下), 即 $C_n^m \cdot C_{n-m}^m \cdot 2^{n-2m}$

$$\therefore L(n) = \sum_{m=0}^{[\frac{n}{2}]} C_n^m \cdot C_{n-m}^m \cdot 2^{n-2m} = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\frac{n-1}{2}} C_n^m \cdot C_{n-m}^m \cdot 2^{n-2m} & n \text{ 为奇数} \\ \sum_{m=0}^{\frac{n}{2}} C_n^m \cdot C_{n-m}^m \cdot 2^{n-2m} & n \text{ 为偶数} \end{cases} \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

等价于求 $(x+1)^{2n}$ 中含 x^n 项的系数, 为 C_{2n}^n

$$(x+1)^{2n} = (x^2 + 2x + 1)^n = [(2x+1) + x^2]^n = \sum_{r=0}^n C_n^r \cdot (2x+1)^{n-r} \cdot x^{2r}$$

其中含 x^n 项的系数为

$$\sum_{r=0}^{[\frac{n}{2}]} C_n^r \cdot C_{n-r}^{n-2r} \cdot 2^{n-2r} = \begin{cases} \sum_{r=0}^{\frac{n-1}{2}} C_n^r \cdot C_{n-r}^{n-2r} \cdot 2^{n-2r} & n \text{ 为奇数} \\ \sum_{r=0}^{\frac{n}{2}} C_n^r \cdot C_{n-r}^{n-2r} \cdot 2^{n-2r} & n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sum_{r=0}^{\frac{n-1}{2}} C_n^r \cdot C_{n-r}^r \cdot 2^{n-2r} & n \text{ 为奇数} \\ \sum_{r=0}^{\frac{n}{2}} C_n^r \cdot C_{n-r}^r \cdot 2^{n-2r} & n \text{ 为偶数} \end{cases} = \sum_{r=0}^{[\frac{n}{2}]} C_n^r \cdot C_{n-r}^r \cdot 2^{n-2r} = C_{2n}^n = L(n)$$

故 $L(n) = C_{2n}^n$ 10 分