《数系的扩充》的教学设计与教学体会

陆明明

（江苏省宿迁中学 223800）

第五届全国高中数学青年教师优秀课观摩与评比活动于2010年10月18日在河南郑州落下帷幕，笔者作为江苏省参赛选手之一，所执教的课题《数系的扩充》的第一课时荣获一等奖．本节课从市级赛课到省级赛课再到全国赛课，经过了多次打磨再打磨．为此，笔者将本节课的教学设计与教学体会整理如下，以期与同行交流．

1 教材分析

1.1 地位及作用

新课程从数系扩充的角度引入复数，把实数集扩充到复数集，完成了中学阶段数系的最后一次扩充．它的内容是分层设计的：先将复数看成是有序实数对，然后学习了复数的代数形式的四则运算，再把复数看成是直角坐标系下平面上的

问题3：关于正弦定理的证明，教材给出了如下四种思路：(1)转化为直角三角形中的边角关系；(2)建立直角坐标系，利用三角函数的定义；(3)通过三角形的外接圆，将任意三角形问题转化为直角三角形问题；(4)利用向量的投影或数量积(产生三角函数)．请同学们写出详细的证明过程．

问题4：在证明的过程中有哪些注意点？突出的思想方法是什么？

问题5：三角形中有一个最简单的“回路向量$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\mathbf{0}$”，对这个式子我们常作怎样的变形处理？(移项、平方)$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BC}$的夹角是角B吗？(这是学生的易错点)

问题6：余弦定理是勾股定理的，你能用勾股定理证明余弦定理吗？

问题7：你能说出这两种证明思路的区别吗？

设计意图 从特殊到一般，让学生经历定理的提出过程．问题3主要给学生指明探究的方向.实践证明，如果教师不加以提示，学生是很难想到这些方法的．正弦定理、余弦定理的核心是三角形中的边角之间的关系．化归是其核心方法，不仅体现在边角之间的转化，还体现在将不熟悉的问题转化为熟悉的问题来处理．因此，在复习时应当让学生体察到这一点．勾股定理和平面向量是两个不同的结构，都能推出余弦定理．余弦定理的变形公式$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$可以看做数量积的另一种表达形式：$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2}$.

高三“课时紧，任务重”的特点决定了高三概念课的复习又不同于新授课的教学．没有足够的时间让学生经历“问题情境、学生探究、建构数学”等过程，但笔者认为，在核心概念的复习时要舍得花时间．“学生的思维展开程度和参与水平是衡量教学有效性的核心指标．”[2]我们可以尝试改变“师生共同回忆或直接由教师告知”的方式，围绕基本概念，按照一定逻辑结构精心设计好“问题串”，实现知识点由简单到复杂的量变，从而实现将学生的思维从识记、模仿等低层次活动向分析、综合等高层次活动的质的飞跃．在设置问题串时要注意：问题串要具有一定的探究性和开放性．适当加大学生的思维量，让不同层次的学生都有思考的空间，让每一个学生都能体味收获的快乐．

参考文献

1 李邦河．数的概念的发展[J]．数学通报，2009，8

2 章建跃．数学概念的理解与教学[J]．中学数学教学参考，2010，11

点或向量，最后介绍复数代数形式的加、减运算的几何意义. 这样有利于学生充分理解数系的扩充过程、复数运算的意义，从而进一步体会数学体系建构过程和数形结合思想方法.

本节课的学习，一方面学生通过回忆数系扩充的过程，体会虚数引入的必要性和合理性. 另一方面，学生能够理解复数的有关概念与复数相等的充要条件，为今后的学习奠定基础. 因此，本节课具有承前启后的作用，也是本章的重点内容.

1.2 教学重点、难点

根据教学内容分析及学生已有的认知基础，本节课的教学重点、难点确定为：

重点：数系扩充的过程，复数的有关概念，复数相等的充要条件.

难点：数系扩充的原则及虚数单位 i 的理解.

2 目标分析

遵循新课标，本节课的教学目标确定如下：

2.1 知识与技能

理解复数的概念及复数的代数表示，掌握复数相等的充要条件.

2.2 过程与方法

通过回忆并感知数系扩充的过程，通过归纳并感悟数系扩充的基本方法，进而形成并理解复数的有关概念.

2.3 情感、态度与价值观

通过问题情境感受虚数引入的必要性，体会人类理性思维的作用，形成学习数学知识的积极态度.

3 学情分析

学生已经历过自然数集→整数集→有理数集→实数集的扩充过程，并初步感受在扩充过程中数系结构与运算性质的变化，但仍然无法解决在实数集内负数开平方问题. 根据历史相似性原理，结合学生以上的认知基础，预测学生在学习本节内容可能产生的认知障碍：实数集怎样扩充呢？为什么引入 i 呢？

4 教法学法

由教材分析、目标分析、学情分析，本节课的教法学法确定为：教法上，主要采用问题驱动教学模式. 学法上，主要采用类比迁移、尝试发现学习模式. 通过设置问题，让学生形成认知冲突，引领学生追溯历史，提炼数系扩充的原则，帮助学生合乎情理的建立新的认知结构，让数学理论自然诞生在学生的思想中.

5 教学流程

本节课的教学程序分成六个环节来进行.

5.1 创设情境 激疑诱思

以历史上卡尔丹的源问题入手：

问题1 能否将10分成两部分，且使两者的乘积为40？

设计意图 引领学生重温历史，感悟数学发现并不神秘，数学家也是从常规问题入手，让学生与数学大师一起思考问题、解决问题. 归纳出："找不到这样的两个实数，它们的和为10，积为40"，也就是"方程 $x^2-10x+40=0$ 在实数集内无解". 历史上，卡尔丹没有就此停止，"有没有两数之和为10呢？有没有两数之积为40呢？为什么这个方程无解呢？"，让学生处于"愤悱"状态，形成认知冲突. 接着，让学生和卡尔丹一起写出了两个怪东西："$5+\sqrt{-15}$，$5-\sqrt{-15}$"，但卡尔丹写得并不轻松，"不管良心受到多大的责备"也要写出这两个怪东西，而且发现它们之和为10，之积为40，正是要找的数. 此时，让学生感受到实数已经不够用了，从而体现学习新知识的必要性，进而引出课题.

数的历史源远流长，现在，就让我们沿着历史的足迹看看数集是如何发展的.

5.2 学生活动 重温"扩充"

问题2 数系经历了哪几次扩充？每一次扩充分别解决了哪些问题？

设计意图 本节课的生长点是学生对数已经建立的认知序，即学生已经学习过一些数集，在此基础之上，帮助学生梳理数系扩充的过程，了解数系扩充的历史序，从而形成数系扩充的逻辑序. 在此过程，让学生充分交流、合作、讨论，感受到每一次扩充都要引入新数，与此同时，感受到数系扩充是社会发展的需要，如：计数、平均分配、测量等，同时也是数学内部发展的需要，如：不够减了、不能整除了、不能总可以开方了等，从而完成数系扩充表(如表1).

$$\text{自然数集}\xrightarrow[\text{负整数}]{\text{引入}}\text{整数集}\xrightarrow[\text{分数}]{\text{引入}}\text{有理数集}\xrightarrow[\text{无理数}]{\text{引入}}\text{实数集}$$

自然数集	整数集	有理数集	实数集
+	+	+	+
×	×	×	×
乘方	乘方	乘方	乘方
	−	−	−

÷　　÷

开方

问题3　这几次数系的扩充共同特点是什么?

设计意图　引导学生通过对前几次数系扩充的归纳与梳理，感受到数系扩充的合理性，并能提炼出数系扩充的一般原则："①引入新数；②在新的数集中，原有的运算及其性质仍然适用，同时解决了某些运算在原来数集中不是总可以实施的矛盾."为数系的再一次扩充以及如何扩充打好了坚实的基础；同时，有利于培养学生的归纳、概括与表达能力．由此，突破本节课的一个难点．

历史在前进，社会在发展，生活中的矛盾不断涌现，五百年前一个怪东西摆在卡尔丹面前，即$\sqrt{-15}$．此时，提出问题：

5.3　类比迁移　引入新元

问题4　为了解决负数开平方问题，实数集应怎样扩充呢?

设计意图　此时即将卡尔丹问题，归结为-15怎样开平方，也就是找一个数的平方等于-15,我们知道$\sqrt{15}$已经解决，进而引领学生将问题转化为找一个平方为-1的"新数"，让"引入新元i"水到渠成．再规定："①$i^2=-1$；②实数可以与i进行四则运算，进行四则运算时，原有的加法、乘法运算律仍然成立."，从而实数集得以扩充．

5.4　尝试发现　诞生概念

问题5　引入新元i后，可以产生哪些新的数呢?

设计意图　学生利用新知先写出卡尔丹要找的数，然后再模仿、尝试写出其他含有i的一些新数，追问："你能写出一个形式，把刚才所写的数都包含在内吗?"，引导学生由特殊到一般，从而概括出复数的代数形式$a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，并学习复数的有关概念，从而完成从实数集到复数集的扩充．追问："形如$a+bi(a,b\in\mathbf{R})$的数一定是虚数吗?"，引导学生由实数a，b的不同取值对复数进行分类，即

$$z=a+bi\begin{cases}b=0,\ \text{实数;}\\ b\neq 0,\ \text{虚数(当}a=0\text{时为纯虚数)}\end{cases}$$

从而深化复数概念，攻克本节课的重点，数系扩充表得以完善．

5.5　精选例题　学以致用

为了检测学生对复数有关概念的理解，我设置了下列三组练习：

例1　请你说出下列集合之间的关系：**N**，**Z**，**Q**，**R**，**C**.

设计意图　例1主要是前后照应，采用概念同化的方式完善认知结构，用符号语言重现数系扩充的过程，像树的年轮一样在生长．

例2　写出下列复数的实部与虚部，并指出哪些是实数，哪些是虚数，哪些是纯虚数．

$$4,\ 2-3i,\ 0,\ -\frac{1}{2}+\frac{4}{3}i,\ 5+\sqrt{2}i,\ 6i,\ 2i^2$$

例3　实数m取什么值时，复数$z=m(m-1)+(m-1)i$是：(1)实数?(2)虚数?(3)纯虚数?

设计意图　例题2、例题3主要是让学生熟悉复数的分类标准，在解决问题的过程中内化复数有关概念，起到及时反馈、学以致用的功效．

并追问：对于复数$z_1=a+bi$，$z_2=c+di$(a，b，c，$d\in\mathbf{R}$)，你认为在什么情况下相等呢?

由有序实数对(a,b)即复数的实部、虚部与复数$z=a+bi$之间的对应关系，引导学生认同复数相等的充要条件，从而为在直角坐标系中用点表示复数提供了可能．接着设置了：

例4　已知$(x+y)+(x-2y)i=(2x-5)+(3x+y)i$，求实数$x$，$y$的值．

设计意图　强化复数相等的充要条件，并在解决问题过程中让学生初步感受到复数问题可以化归为实数问题．

今天我们从数系扩充的角度引入新元，解决了实数集内负数不能开平方问题，进而学习了复数的有关概念．

5.6　小结收获　理性升华

通过本节课的学习，你有哪些收获与体会呢?

设计意图　学生总结，教师提炼，在课堂交流中形成总结的模式和反思的习惯．

6　教学体会

6.1　再现历史，设置问题情境，体现数学的文化内涵

常规的情境设置大都从学生已有的知识出发，设置学生看得见、摸得着、能理解、充分调动学生学习积极性的实际生活情境．但历史告诉

我们，复数的产生不是来自生活实践，而是纯粹的理论创造．事实上，连数学家们都未曾预见到复数将会在实际生活中的应用，例如电学、空气动力学等．而这些应用的理解需要一定的专业知识，学生不具备这些专业知识基础，这就为本节课的情境设置提出挑战．本节课笔者从学生已有的知识基础出发，再现历史上数学家卡尔丹的问题，让学生经历与数学大师一起发现问题、思考问题、解决问题的过程，感受到数学家就在自己的身边，数学大师并不神秘，他们也曾有解不开的难题，小小的“i”硬是经过了两个世纪的努力才被人接受；数学发现并不神秘，大师们通常是在别人习以为常的现象中发现新问题并穷追不舍；数学并不神秘，只要我们“更新观念”，跳出原有的旧框框，一片更为广阔的数学天地便尽收眼底……数学的文化内涵在历史的脉络中体现的淋漓至尽，学生学到的不仅是知识，更多的隐藏在知识发现过程中的数学思想、方法和数学精神，感受的是浓浓的数学文化气息．

6.2 设置问题串，重温“扩充”，加深对数学思想方法的理解

日本数学家米山国藏曾说过：在学校学的数学知识，毕业后若没什么机会去用，一两年后，很快就忘掉了．然而，不管他们从事什么工作，唯有深深铭刻在心中的数学的精神、数学的思维方法、研究方法、推理方法和看问题的着眼点等，却随时随地发生作用，使他们终生受益．数学作为一门精密逻辑的科学体系，以学术形态存在，具有抽象性、逻辑性和系统性，却蕴涵着丰富的思想方法．学生在理解、把握数学知识中，不仅仅是记忆形式上的数学知识，更重要的是领会以数学知识为载体的数学思想方法等．从实数系到复数系，如何扩充的？扩充的原则是什么？笔者通过设计问题串，引领学生追溯数的发展历史，类比前几次数系的扩充，让学生在知识发生过程中进行“火热的思考”，实现“再创造”，抽象概括出数系扩充的原则．在此过程中，学生不仅仅是实现了数系的扩充，更重要的是通过“火热的思考”、“再创造”，形成数系扩充的思想和方法．

6.3 问题引领，“亲历”过程，架起从感性认识到理性认识的桥梁

人们的认识过程是从感性到知性再到理性的，因而要形成理性认识，必须依赖于感性的体验到知性的理解．从虚数的“生长”过程来看，即使是数学家的认识也是逐步深入的．这是数学家几代人共同努力的产物：是一个从无到有、从疑惑到接受、从模糊到清晰、从片面到完善的过程．只有学生亲身“经历”这一历史过程，才能体验到数学家的创造过程；才能感知到数学家的认知过程；才能感悟到数学家的思维过程．只有学生亲身“经历”这一历史过程，才能消除学生对虚数的疑惑：“虚数是什么？为什么要引入？怎么引入？引入后有什么用?”．只有学生亲身“经历”这一历史过程，才能感受到虚数不是神秘莫测、绝对权威的，是一种创造．

6.4 学生畅谈，教师总结，培养学生科学品质和创新精神

数学是人类智慧的结晶．历史告诉我们，复数的产生和发展是数学家们辛勤耕耘的结果，是思想观念的突破．它体现了数学家的科学品质和创新精神．象这样的方程没有实数解在学生心目中已成定论，既然没有实数解，为什么还要讨论它？既然负数不能开平方，又为什么要承认是有意义的？这是一种心理上的矛盾、认知上的冲突，更是观念上的碰撞．历史的再现对学生的影响作用是巨大的，他们体会到了虚数的引入是一种创造，一种发明，一种思维上的突破，一种观念上的更新．他们从数学家不懈努力的历程看到了一种精神、一种力量、一种思维方法，正如同学们在课堂小结中所说：“我感受到了数学家善于发现问题，在解决问题时遇到困难不放弃，以及数学家持之以恒、坚韧不拔的精神”．“我知道了什么是复数，那我在想复数以外还有没有其他的数呢?”多么宝贵的感受，多么顺其自然而又富有创新精神的提问！这种感受远比他们获得复数知识本身重要的多，它折射了教育的真谛．

参考文献

1 邓东皋，孙小礼，张祖贵编．数学与文化[M]．北京：北京大学出版社，1999，11

2 中华人民共和国教育部．全日制义务教育数学课程标准(实验稿)[M]．北京：北京师范大学出版社，2001

3 燕学敏．数学史融入数学教育的有效途径与实施建议(J)．数学通报，2009，8

4 李邦河．数的概念的发展(J)．数学通报，2009，8

5 刘咏梅等．关于数学文化的几个问题的哲学思考(J)．数学教育学报，2009，2