江苏省仪征中学 2018-2019 学年第二学期期末复习讲义三

班级___________　　学号_________　　姓名_______________　　自我评价 ___________

1. 关于 t 的不等式$t^2-4t-m<0$有解，则实数 m 的取值范围是______ ．$(-4,+\infty)$

解：关于 t 的不等式$t^2-4t-m<0$有解，$\therefore\Delta=(-4)^2-4\cdot(-m)>0$，

解得$m>-4$，∴实数 m 的取值范围是$m>-4$.

2. 若方程$\lg(x+1)+x-3=0$在区间$(k,k+1)$内有实数根，则整数 k 的值为______．2

解：令$f(x)=\lg(x+1)+x-3$，则$f(x)$在区间$(k,k+1)\ (k\in Z)$上单调递增，由于$f(2)=\lg3-1<0$，$f(3)=\lg4>0$，$\therefore f(2)f(3)<0$，$f(x)$在$(2,3)$上有唯一零点，

∵方程$\lg(x+1)+x-3=0$的实数根即为$f(x)$的零点，故$f(x)$在区间$(k,k+1)\ (k\in Z)$上有唯一零点，$\therefore k=2$.

3. 函数$f(x)=\frac{\ln x}{x}$的单调递减区间是______ $(e,+\infty)$

解：$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$. ∵$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，令$f'(x)<0$，可得$1-\ln x<0$，解得$x>e$.所以函数的单调递减区间为$(e,+\infty)$.

4. 已知 p：$-4<x-a<4$，q：$(x-1)(2-x)>0$，若 $\neg p$是 $\neg q$的充分条件，则实数 a 的取值范围是______ 。$[-2,5]$

解：由$-4<x-a<4$得，$a-4<x<a+4$，即：$a-4<x<a+4$。∵$(x-1)(2-x)>0$，

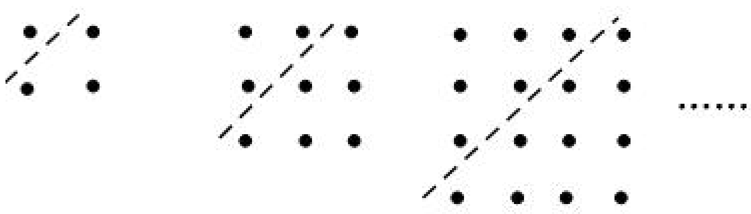
$\therefore 1<x<2$，即 q：$1<x<2$，若 $\neg p$是 $\neg q$的充分条件，则 q 是 p 的充分条件，

则$\begin{cases}a+4\geq 2\\ a-4\leq 1\end{cases}$，解得$-2\leq a\leq 5$，∴实数 a 的取值范围是$-2\leq a\leq 5$，

5. 已知半径为 1 的扇形面积为$\frac{\pi}{3}$，则此扇形的周长为________.

$\frac{2\pi}{3}+2$

6. 古希腊著名的毕达哥拉斯学派把1,3,6,10,...这样的数称为“三角形数”，而把1,4,9,16,...这样的数称为“正方形数”.如图，可以发现任何一个大于 1 的“正方形数”都可以看作两个相邻“三角形数”之和，下列等式：①$36=15+21$；②$49=18+31$；③$64=28+36$；④$81=36+45$中符合这一规律的等式是_______.(填写所有正确结论的编号) ①③④



解：由已知条件可得如下规律等式

$4=1+3$，$9=3+6$，$16=6+10$，$25=10+15$，$36=15+21$，$49=21+28$，

$64=28+36$，$81=36+45$，∴故答案为①③④

7. 已知 $sin(x+y)=\frac{1}{3}$，$sin(x-y)=1$，则 $tanx+2tany=$________.

$\because \sin(x+y)=sinxcosy+cosxsiny=\frac{1}{3}$，

$\sin(x-y)=sinxcosy-cosxsiny=1$，联立可解得 $sinxcosy=\frac{2}{3}, cosxsiny=-\frac{1}{3}$，

$\therefore \frac{sinxcosy}{cosxsiny}=\frac{\tan x}{\tan y}=-2$. 故 $tanx+2tany=0$.

即答案为 0.

8. 江苏省连云港市 2016-2017 学年高二下期末文】若函数 $f(x)=\begin{cases}(4a-2)x+a, x<1\\ \log_a x, x\ge 1\end{cases}$ 对任意 $x_1\ne x_2$ 都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$，则实数 a 的取值范围是________.

【解析】函数 $f(x)=\begin{cases}(4a-2)x+a, x<1\\ \log_a x, x\ge 1\end{cases}$，对任意 $x_1\ne x_2$ 都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$，则函数 $f(x)$ 在其定义域上是减函数，$\therefore \begin{cases}4a-2<0\\ 0<a<1\\ 4a-2+a\ge 0\end{cases}$，$\therefore \frac{2}{5}\le a<\frac{1}{2}$，故答案为 $\left[\frac{2}{5},\frac{1}{2}\right)$.

9. 将函数 $f(x)=2sin(2x-\frac{\pi}{6})$ 的图象向左平移 $\phi(\phi>0)$ 个单位，若所得到图象关于原点对称，则 ϕ 的最小值为________.

因为函数 $f(x)=2sin(2x-\frac{\pi}{6})$ 的图象向左平移 $\phi(\phi>0)$ 个单位得 $g(x)=2sin(2(x+\phi)-\frac{\pi}{6})$，所以 $2\phi-\frac{\pi}{6}=k\pi(k\in Z)\therefore \phi=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}(k\in Z)$

因为 $\phi>0$，所以 $\phi_{min}=\frac{\pi}{12}$.

10. 已知实数 $a>0$ 且 $a\ne 1$，函数 $f(x)=\begin{cases}a^x, x<1,\\ x^2+\frac{4}{x}+a\ln x, x\geqslant 1\end{cases}$ 在 R 上单调递增，则实数 a 的取值范围是____________. [2,5]

解：因为函数$f(x)=\begin{cases}a^x,x<1\\x^2+\frac{4}{x}+a\ln x,x\geq 1\end{cases}$在 R 上单调递增，所以$a>1$，又$a^1\leq 1+4=5$，

所以$1<a\leq 5$，又$g(x)=x^2+\frac{4}{x}+a\ln x$要在$[1,+\infty)$单调递增，所以$g'(x)=2x-\frac{4}{x^2}+\frac{a}{x}\geqslant 0$在

$[1,+\infty)$上恒成立，所以$a\geq\frac{4}{x}-2x^2$在$[1,+\infty)$上恒成立，又$y=\frac{4}{x}-2x^2$在$[1,+\infty)$上单调递减，

所以$\frac{4}{x}-2x^2\leq 2$，所以$a\geq 2$，综上$2\leq a\leq 5$.

11. 已知圆 O：$x^2+y^2=1$，圆 M：$(x-a)^2+(y-2)^2=2$．若圆 M 上存在点 P，过点 P 作圆 O 的两条切线，切点为 A，B，使得 PA⊥PB，则实数 a 的取值范围为_______.

12. 在平面直角坐标系 xoy 中，过圆 C_1：$(x-k)^2+(y+k-4)^2=1$ 上任一点 P 作圆 C_2：$x^2+y^2=1$ 的一条切线，切点为 Q，则当线段 PQ 长最小时，k＝______

答案：2

解析：如下图，因为 PQ 为切线，所以，PQ⊥C_2Q，由勾股定理，得：

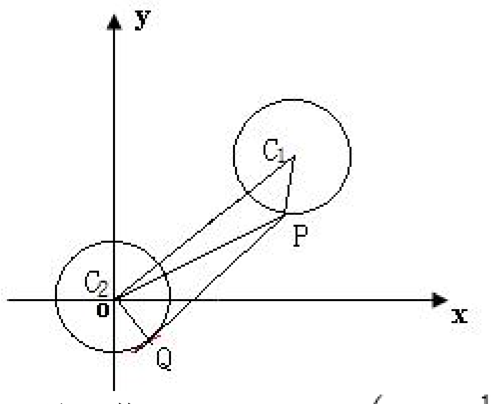
｜PQ｜＝$\sqrt{PC_2{}^2-1}$，要使｜PQ｜最小，则须 PC_2 最小，

显然当点 P 为 C_1C_2 与 C_1 的交点时，PC_2 最小，

此时，｜PC_2｜＝｜C_1C_2｜－1，所以，当｜C_1C_2｜最小时，｜PC_2｜就最小，

｜C_1C_2｜＝$\sqrt{k^2+(-k+4)^2}=\sqrt{2(k-2)^2+8}\geq 2\sqrt{2}$学科网

当 k＝2 时，｜C_1C_2｜最小，得到｜PQ｜最小。



13. 已知函数$f(x)=(\log_2 x-2)\left(\log_4 x-\frac{1}{2}\right)$

(1)当$x\in[2,4]$，求该函数的值域；

(2)若$f(x)\geq m\log_2x$对于$x\in[4,16]$恒成立，求 m 的取值范围.

解：(1)函数函数$f(x)=(\log_2x-2)\left(\log_4x-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}[(\log_2x)^2-3\log_2x+2]$，

令$t=\log_2x$，$x\in[2,4]$则$t\in[1,2]$，所以$y=\frac{1}{2}(t^2-3t+2)$，对称轴$t=\frac{3}{2}\in[1,2]$，

当$t=\frac{3}{2}$时，取得最小值$-\frac{1}{8}$；$t=1$或 2 时，函数取得最大值 0，所以$y\in\left[-\frac{1}{8},0\right]$；

(2)因为$f(x)\geq m\log_2x$对于$x\in[4,16]$恒成立，由(1)得$\frac{1}{2}(t^2-3t+2)\geq mt$对于$t\in[2,4]$恒成立，所以$m\leq\frac{1}{2}\left(t-3+\frac{2}{t}\right)$对于$t\in[2,4]$恒成立，令$g(t)=\frac{1}{2}\left(t-3+\frac{2}{t}\right)$，$t\in[2,4]$

则$g'(t)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{t^2}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{t^2-2}{t^2}>0$ 所以函数$g(t)$在$[2,4]$单调递增，则$g(t)_{min}=0$，所以$m\leq 0$，

故 m 的取值范围为$(-\infty,0]$.

14. 已知平面区域$\begin{cases}x\geq 0\\ y\geq 0\\ x+2y-4\leq 0\end{cases}$ 恰好被面积最小的圆$C:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$及其内部所覆盖.

(1)试求圆C的方程.

(2)若斜率为 1 的直线l与圆 C 交于不同两点A,B.满足$CA\perp CB$,求直线l的方程.

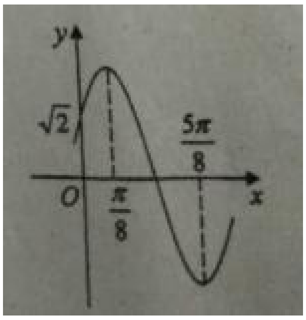
15. 解:(1)由题意知此平面区域表示的是以$O(0,0),P(4,0),Q(0,2)$构成的三角形及其内部,且$\triangle OPQ$是直角三角形,所以覆盖它的且面积最小的圆是其外接圆,故圆心是(2,1),半径是$\sqrt{5}$,所以圆C的方程是$(x-2)^2+(y-1)^2=5$.

(2)设直线l的方程是:$y=x+b$. 因为$CA\perp CB$,所以圆心C到直线l的距离是$\frac{\sqrt{10}}{2}$,即$\frac{|2-1+b|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$解得:$b=-1\pm\sqrt{5}$.　　所以直线$l$的方程是:$y=x-1\pm\sqrt{5}$.

15.如图为函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$（其中$A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}$）的一段图象.

（1）写出函数$f(x)$的解析式和单调增区间；

（2）若$\alpha\in(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}),\beta\in(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})$，且$f(\frac{\alpha}{2})=\frac{\sqrt{26}}{13},f(\frac{\beta}{2}-\frac{\pi}{4})=\frac{4\sqrt{13}}{13}$，求$\alpha+\beta$的值.



16. 解：(1) 由图象可知 $T=2\times(\frac{5\pi}{8}-\frac{\pi}{8})=\pi$. $\omega=\frac{2\pi}{T}=2$.

$f(\frac{\pi}{8})=A\sin(\frac{\pi}{4}+\varphi)=A$，又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$ $\therefore \varphi=\frac{\pi}{4}$

又 $f(0)=\sqrt{2}=A\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}A$. $\therefore A=2$

$\therefore f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{4})$ 由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\le 2x+\frac{\pi}{4}\le 2k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in Z$

$\therefore f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{4})$ 的单调增区间为 $[k\pi-\frac{3\pi}{8}, k\pi+\frac{\pi}{8}], k\in Z$

(2) $\because \alpha\in(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}), \beta\in(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})$ $\alpha+\frac{\pi}{4}\in(0,\frac{\pi}{2})$

$\beta-\frac{\pi}{4}\in(0,\frac{\pi}{2})$. $\because f(\frac{\alpha}{2})=2\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{26}}{13}$

$\therefore \sin(\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{26}}{26}$, $\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{5\sqrt{26}}{26}$

$f(\frac{\beta}{2}-\frac{\pi}{4})=2\sin(\beta-\frac{\pi}{4})=\frac{4\sqrt{13}}{13}$. $\therefore \sin(\beta-\frac{\pi}{4})=\frac{2\sqrt{13}}{13}$

$\cos(\beta-\frac{\pi}{4})=\frac{3\sqrt{13}}{13}$ $\therefore \cos(\alpha+\beta)=\cos[(\alpha+\frac{\pi}{4})+(\beta-\frac{\pi}{4})]$

$=\frac{5\sqrt{26}}{26}\times\frac{3\sqrt{13}}{13}-\frac{\sqrt{26}}{26}\times\frac{2\sqrt{13}}{13}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\therefore \alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$

16. 已知函数$f(x)=\log_3 x-3,(1\leqslant x\leqslant 3)$，设$F(x)=f^2(x)+f(x^2)$

(1)求$F(x)$的最大值及最小值.

(2)已知条件$p:1\le x\le 3$，条件$q:|F(x)-m|<2$ *且 p 是 q*的充分条件，求实数 m 的取值范围.

解：(1) $\because f(x)=\log_3 x-3(1\le x\le 3)$,

$\therefore F(x)=f^2(x)+f(x^2)=(\log_3 x-3)^2+\log_3 x^2-3=\log^2 x-4\log_3 x+6$，

$\begin{cases}1\le x\le 3\\ 1\le x^2\le 3\end{cases}\Rightarrow 1\le x\le\sqrt{3}$，令$t=\log_3 x$，则$t\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$，

$\therefore F(t)=t^2-4t+6=(t-2)^2+2$，$F(x)_{max}=6$，$F(x)_{min}=\frac{17}{4}$.

(2)$|F(x)-m|<2\Leftrightarrow m-2<F(x)<m+2$，　$\because p$是 q 的充分条件，

$\begin{cases}m-2<\frac{17}{4}\\ m+2>6\end{cases}\Rightarrow 4<m<\frac{25}{4}$，　　$\therefore m$的取值范围是$4<m<\frac{25}{4}$.

17.已知$sin\theta+cos\theta=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$，$\theta\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$.

（1）求θ的值；

（2）若$sin^2x-sin^2(x+\theta)=\frac{1}{4}$，且$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，求$x$的值.

【答案】（1）$\theta=-\frac{\pi}{6}$；（2）$x=\frac{\pi}{6}$.

【解析】

（1）由$sin\theta+cos\theta=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$，得$(sin\theta+cos\theta)^2=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

即$sin^2\theta+2sin\theta cos\theta+cos^2\theta=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以$sin2\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因为$\theta\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$，所以$2\theta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，所以$2\theta=-\frac{\pi}{3}$，即$\theta=-\frac{\pi}{6}$.

（2）由（1）知$\theta=-\dfrac{\pi}{6}$，

所以$sin^2x-sin^2(x+\theta)=sin^2x-sin^2\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}(1-cos2x)-\dfrac{1}{2}\left[1-cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)\right]$

$=\dfrac{1}{2}\left[cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)-cos2x\right]=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}sin2x-\dfrac{1}{2}cos2x\right)$

$=\dfrac{1}{2}sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$.

所以$\dfrac{1}{2}sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{4}$，即$sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$，

因为$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，所以$2x-\dfrac{\pi}{6}\in\left(-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right)$，所以$2x-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}$，得$x=\dfrac{\pi}{6}$.

所以所求的x为$\dfrac{\pi}{6}$.

20. 已知以点$C(t,\dfrac{2}{t})(t\in\mathbf{R},t\neq0)$为圆心的圆与$x$轴交于点$O,A$，与$y$轴交于点$O$、$B$，其中$O$为原点.

(1)求证：ΔOAB的面积为定值;

(2)设直线$y=-2x+4$与圆C交于点M,N，若$OM=ON$，求圆C的方程.

20. 解：（1）$\because$ 圆C过原点O，$\therefore OC^2=t^2+\dfrac{4}{t^2}$.

设圆C的方程是$(x-t)^2+(y-\dfrac{2}{t})^2=t^2+\dfrac{4}{t^2}$，

令$x=0$，得$y_1=0,y_2=\dfrac{4}{t}$；令$y=0$，得$x_1=0,x_2=2t$.

$\therefore S_{\Delta OAB}=\dfrac{1}{2}OA\times OB=\dfrac{1}{2}\times|\dfrac{4}{t}|\times|2t|=4$，即$\Delta OAB$的面积为定值.

（2）$\because OM=ON,CM=CN,\therefore OC$垂直平分线段$MN$.

$\because k_{MN}=-2,\therefore k_{oc}=\dfrac{1}{2}$，$\therefore$ 直线OC的方程是$y=\dfrac{1}{2}x$.

$\therefore\dfrac{2}{t}=\dfrac{1}{2}t$，解得：$t=2$或$t=-2$.

当$t=2$时，圆心C为$(2,1)$，$OC=\sqrt{5}$，此时C到直线$y=-2x+4$的距离$d=\dfrac{9}{\sqrt{5}}<\sqrt{5}$，

$\therefore$圆C与直线$y=-2x+4$相交于两点.

当$t=-2$时,圆心C为$(-2,-1)$,$OC=\sqrt{5}$,则C到直线$y=-2x+4$距离$d=\dfrac{9}{\sqrt{5}}>\sqrt{5}$，

$\therefore$圆C与直线$y=-2x+4$不相交，$\therefore t=-2$不符合题意舍去.

所以圆C的方程为$(x-2)^2+(y-1)^2=5$.