微专题椭圆中三角形面积最值问题探究

江苏省海门中学　(226100)　汪香丽

本微专题给出椭圆中三角形面积最值问题的数学模型，按照三个顶点的动静状态分类为一个动点、两个动点及三个动点的椭圆内接三角形，分别给出了相应的处理优化策略，其数学模型具有通用化与迁移性，体现出数学的核心素养。每个例题均渗透两种数学思想——转化与化归思想、数形结合思想，让学生掌握一项技能即设而不求，优化运算求解的过程，选取恰当的合理的可操作的方法处理解析几何问题.

一、定边一动点，转化为点到线的距离求最值

例1　如图1，已知椭圆 $E:\frac{x^2}{4}+y^2=1$，动直线 l 与椭圆交于 A,B 两点，若点 A 的坐标为 $(-1,\frac{\sqrt{3}}{2})$，求 ΔAOB 面积的最大值.

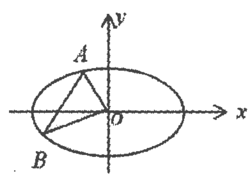

图1

方法一：借助三角函数辅助角公式求最值.

解：$A(-1,\frac{\sqrt{3}}{2})$，$O(0,0)$，$B(x,y)$，则 OA 的方程 $\sqrt{3}x+2y=0$，$B(x,y)$ 到 OA 的距离是 $d=\frac{|\sqrt{3}x+2y|}{\sqrt{7}}$，令 $x=2\cos\theta,y=\sin\theta$，则 $d=\frac{|2\sqrt{3}\cos\theta+2\sin\theta|}{\sqrt{7}}=\frac{4\left|\sin(\theta+\frac{\pi}{3})\right|}{\sqrt{7}}$，所以当 $\sin(\theta+\frac{\pi}{3})=\pm1$，$d_{\max}=\frac{4}{\sqrt{7}}$，$S_{\max}=1$.

方法二：借助一元二次方程的判别式求最值

解：作 OA 的平行线 l 与椭圆相切于点 B，此时 ΔOAB 面积最大，$l:y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+m$.

联立 $\begin{cases}y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+m,\\x^2+4y^2=4,\end{cases}$ 消去 y，得到 $x^2-\sqrt{3}mx+m^2-1=0$.

令 $\Delta=3m^2-4(m^2-1)=0\Rightarrow m=\pm2$，此时 l：$\sqrt{3}x+2y\pm4=0$，OA：$\sqrt{3}x+2y=0$，l 和 OA 之间的距离 $d=\frac{4}{\sqrt{7}}$，所以 $(S_{\Delta OAB})_{\max}=1$.

二、动弦一定点，巧用韦达定理转化为函数求最值

例2　已知椭圆 $E:\frac{x^2}{4}+y^2=1$，动直线 l 与椭圆 E 相交于 A,B 两点，求 ΔOAB 的面积最大值.

解：设直线 $AB:x=t+my$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$AB=\sqrt{1+m^2}|y_1-y_2|$，$d=\frac{|t|}{\sqrt{1+m^2}}$，$S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot d=\frac{|t(y_1-y_2)|}{2}$，联立 $\begin{cases}x=t+my,\\x^2+4y^2=4\end{cases}$ 消去 x，得到 $(m^2+4)y^2+2mty+t^2-4=0$，$\Delta=4m^2t^2-4(m^2+4)(t^2-4)>0\Rightarrow m^2+4>t^2$，由韦达定理知 $y_1+y_2=\frac{-2mt}{m^2+4}$，$y_1y_2=\frac{t^2-4}{m^2+4}$.

$$\begin{aligned}S_{\Delta OAB}&=\frac{|t(y_1-y_2)|}{2}\\&=\frac{|t|}{2}\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}\\&=\frac{|t|}{2}\sqrt{(\frac{-2mt}{m^2+4})^2-\frac{4(t^2-4)}{m^2+4}}\\&=2|t|\sqrt{\frac{m^2+4-t^2}{(m^2+4)^2}}=2\sqrt{\frac{t^2}{m^2+4}-\frac{t^4}{(m^2+4)^2}}.\end{aligned}$$

令 $\mu=\frac{t^2}{m^2+4}\in(0,1)$，$S_{\Delta OAB}=2\sqrt{\mu-\mu^2}=2\sqrt{-(\mu-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}}$. 当 $\mu=\frac{1}{2}$，即 $m^2+4=2t^2$ 时，有 $S_{\Delta OAB}=1$.

三、一边定向三动点，利用导数求最值

例3　已知椭圆 $E:\frac{x^2}{4}+y^2=1$，直线 $l:y=\sqrt{2}x+m(m>0)$ 与椭圆 E 相交于 A,B 两点，P 为椭圆上的任意一点，求 ΔPAB 的面积最大值.

解：作直线 AB 的平行线 l_1 与椭圆右下方相切，切点为 P，设 $l_1:y=\sqrt{2}x+n(n<0)$，联立 $\begin{cases}y=\sqrt{2}x+n,\\x^2+4y^2=4,\end{cases}$ 消 y 得到 $9x^2+8\sqrt{2}nx+4n^2-4=0$，由 $\Delta=(-8\sqrt{2}n)^2-16\times9(n^2-1)=0\Rightarrow n=-3$，

此时 l_1,AB 之间的距离 $d=\frac{m+3}{\sqrt{3}}$,直线与椭圆联立方程得

$$\begin{cases}y=\sqrt{2}x+m\\x^2+4y^2=4\end{cases}\Rightarrow 9x^2+8\sqrt{2}mx+4m^2-4=0.$$

由 $\Delta=(-8\sqrt{2}m)^2-36(4m^2-4)>0\Rightarrow 0<m<3$. 由韦达定理知 $x_1+x_2=\frac{-8\sqrt{2}m}{9}$,$x_1x_2=\frac{4(m^2-1)}{9}$,$AB=\sqrt{3}\,|x_1-x_2|$

$$=\sqrt{3}\sqrt{(-\frac{8\sqrt{2}}{9}m)^2-\frac{16(m^2-1)}{9}}$$

$$=\frac{4\sqrt{3(9-m^2)}}{9},S=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot d$$

$=\frac{2}{9}\sqrt{(9-m^2)(m+3)^2}$,令 $f(m)=(9-m^2)(m+3)^2$,$f'(m)=(m+3)^2(6-4m)$,$m\in(0,3)$,令 $f'(m)=0\Rightarrow m=\frac{3}{2}$,当 $m\in(0,\frac{3}{2})$,$f'(m)>0$,当 $m\in(\frac{3}{2},3)$,$f'(m)<0$,所以当 $m=\frac{3}{2}$ 时,$f(m)_{\max}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

四、问题的一般形式

例4 已知椭圆 $E:\frac{x^2}{4}+y^2=1$,直线 $l:y=kx+m(m>0)$ 与椭圆 E 相交于 A,B 两点,P 为椭圆上的任意一点,求 ΔPAB 的面积最大值.

解:设 $l_1:y=kx+n(n<0)$,且 l_1 与椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 相切,得到 $n^2=4k^2+1$,此时两直线之间的距离是 $d=\frac{m+\sqrt{1+4k^2}}{\sqrt{1+k^2}}$,联立 l 和椭圆方程,由

$\Delta>0\Rightarrow m^2<4k^2+1$,且 $AB=\frac{4\sqrt{1+k^2}\sqrt{4k^2+1-m^2}}{1+4k^2}$,$S=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot d$

$$=\frac{2(m+\sqrt{1+4k^2})\sqrt{1+4k^2-m^2}}{1+4k^2}$$

$=2(\frac{m}{\sqrt{1+4k^2}}+1)\sqrt{1-\frac{m^2}{1+4k^2}}$. 令 $t=\frac{m}{\sqrt{1+4k^2}}\in(0,1)$,则 $S=2\sqrt{(1-t^2)(1+t)^2}$. 当 $t=\frac{1}{2}$ 时,$(S_{\Delta ABP})_{\max}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

也谈几类赛题的三角换元法

湖北省武昌实验中学 (430061) 彭景

广东省珠海市实验中学 (519090) 王恒亮

三角换元法是解决高中数学问题的常用方法,合理利用此方法不仅能降低思维难度还能简化相关运算,它是高中生必须熟练掌握的几种方法之一.高中阶段的各级各类数学竞赛中都不乏有三角换元的影子,合理利用此法有时候可以给我们带来意想不到的效果,笔者结合自己的教学实际谈谈几类赛题中的三角换元,希望对读者有所帮助.

类型1 $x^2+y^2=A^2>0$,$(x=A\cos\theta,y=A\sin\theta)$.

例1 (2013年清华大学自主招生试题)已知 $abc=-1$,$\frac{a^2}{c}+\frac{b}{c^2}=1$,求 $ab^5+bc^5+ca^5$ 的值.

解析:若 $c>0$,对于 $\frac{a^2}{c}+\frac{b}{c^2}=1$ 可进行三角代换 $a=\sqrt{c}\cos\theta$,$b=c^2\sin^2\theta$,由 $abc=-1$,可知 $c^{\frac{7}{2}}=-\frac{1}{\sin^2\theta\cos\theta}$,故 $ab^5+bc^5+ca^5=c^{\frac{21}{2}}\cos\theta\sin^{10}\theta+c^7\sin^2\theta+c^{\frac{7}{2}}\cos^5\theta=-\frac{\sin^4\theta}{\cos^2\theta}+\frac{1}{\cos^2\theta\sin^2\theta}-\frac{\cos^4\theta}{\sin^2\theta}=\frac{1-(\cos^6\theta+\sin^6\theta)}{\cos^2\theta\sin^2\theta}=3$.

若 $c<0$,令 $a=\sqrt{-c}\tan\theta$,$b=c^2\sec^2\theta$,由 abc