

探究还是接受^①

——从“勾股定理”的教学设计说起

顾继玲

(南京师范大学教师教育学院 210097)

数学探究学习是当前数学课程标准倡导的学习方式之一,在数学教学实践中得到了高度关注.但何时探究,何时接受?探究和接受的关系如何处理?对此相关文献讨论较少,基于数学学科的讨论更少,本文拟以“勾股定理”的教学设计为例,对这些问题谈谈自己的看法.

1 问题提出:基于“勾股定理”的两种典型教学设计

勾股定理,是平面几何有关度量的最基本定理,它从边的角度进一步刻画了直角三角形的特征;勾股定理的发现导致无理数的产生,引发数学史上的第一次数学危机;勾股定理可以看做第一个不定方程,为不定方程的求解提供了范式.如此等等,确定了勾股定理的重要价值.但勾股定理的教学设计始终是一个难点,即如何让学生比较自然地想到用面积的方法探索勾股定理,用拼图的方法验证勾股定理或用演绎的方法证明勾股定理,探究还是接受,是教材和教学面临的抉择.

设计方案一:

(1) 介绍关于勾股定理的数学史:《周髀算经》中出现的“勾广三,股修四,径隅五”.

(2) 给出勾股定理:直角三角形两直角边 a 、 b 的平方和,等于斜边 c 的平方,即 $a^2 + b^2 = c^2$.

(3) 用拼图法推证勾股定理.

(4) 勾股定理的应用.

设计方案二:

(1) 创设情境引出研究勾股定理的必要性.

(2) 在方格纸上通过计算面积的方法探索勾

股定理,图 1,图 2.

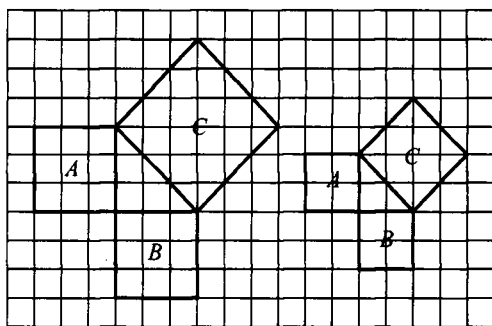


图 1

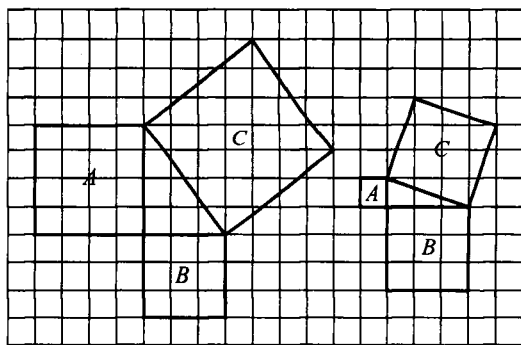


图 2

(3) 由学生通过观察、归纳、猜想、确认勾股定理.

(4) 介绍勾股定理的悠久历史、重大意义.

(5) 利用拼图法验证勾股定理.

(6) 勾股定理的应用.

两种设计的区别是明显的,设计方案一从史料的介绍开始,直接告诉学生勾股定理,然后对其进行验证,不难看出对勾股定理的学习重心更多

^① 基金项目:教育部北京师范大学基础教育课程研究中心课题:初中数学教师理解教材及创造性使用教材的研究,江苏省教育科学“十三五”规划 2018 年度课题:基于“三段式”研课的全日制数学专硕 PCK 发展研究

的是对定理的应用;设计方案二则从学生的活动开始,让学生经历勾股定理的获得过程,从特殊到一般,从数到形,培养学生的合情推理能力,体会数形结合的思想.

从学习方式或教学方式角度来说,一般我们会将方案一归为接受学习,方案二归为探究学习,探究学习的方案有它的优势所在:在探究活动中,学生通过多种活动,去探究和获取勾股定理,可以达到对知识的深层理解;学生学会研究问题的方法,将直角三角形的边长关系转化为正方形的面积关系,从等腰直角三角形到非等腰三角形,从直角边的长是整数到不是整数,获得了勾股定理,更主要的是获得了解决问题的方法和策略——转化、猜想和操作验证,所有这些活动都是解决问题的有效手段;学生形成良好的数学认识,在探究过程中学生形成科学态度和习惯,形成实事求是、精益求精、谦虚谨慎、客观公正、敢于创新的精神.知识技能、过程方法和情感态度价值观的目标均蕴含其中,这正是数学探究学习的目标多元的一种体现.因此,在当前的初中数学教材中都不约而同地选择了设计方案二.

但仔细分析设计方案二,我们不难看出其遗憾之处,即从探究的对象到探究方法的过渡问题:要探寻直角三角形三边之间的关系,采用什么样的方法呢?即使确定三边是平方关系,怎么就想到把直角三角形的边的平方转化成方格纸中的正方形面积进行探究了呢?这里,事实上还是老师的启发引导或人为的告诉.或许有人可能会提出其他的探究方法,如:

给一些勾股数,让学生计算、猜想吧.

(1)3,4,5;(2)5,12,13;(3)...

还没有得到勾股定理,何来勾股数;怎么就想到平方关系呢;结果容易出现偏差,如 $3^2=4+5$, $5^2=12+13$.

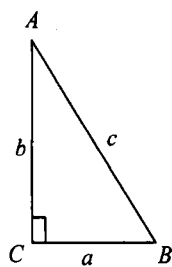
画一些直角三角形,测量,形成猜想吧.

思路是比较自然了,但测量一定有误差,且同样平方关系不容易想到.

看来都不行,我们看到有的教材或教学设计中会直接告知学生:古人发现,直角三角形的三条边长度的平方存在一种特殊的关系.让我们一起去探索吧!然后就给出了方格纸的图形.但勾股定理探索的难点就在于方格纸的引入,怎么想到

将直角三角形放到方格纸中,将直角三角形边的关系转化为正方形的面积关系.

查阅和收集勾股定理的教学设计,我们发现还没有哪个设计能真正突破这个难点.曾在一次公开课中听过一节勾股定理的课,其教学设计不同于教材或常规的教学设计,课下与授课老师交流,他设计的初衷就是想突破上述难点,不妨一看.



提出问题

Rt△ABC 中, $\angle C=90^\circ$, 边 a, b, c 之间有何关系?

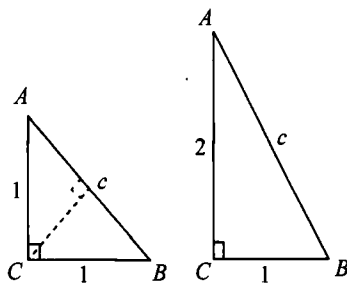
如何解决

1. 从简单的特殊的入手

问题 1: 已知 Rt△ABC, $\angle C=90^\circ$,

(1) 若 $a=b=1$, 你能写出含 c 的等式吗? ($c^2=2$) (注: 所使用教材勾股定理在实数内容之前)

(2) 若 $a=b=2$, 你能写出含 c 的等式吗? ($c^2=8$)



(3) 若 $a=1, b=2$ 呢?

思考:

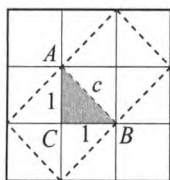
(1)(2) 的条件有什么共同点? (3) 的条件与 (1)(2) 有什么区别?

(1)(2) 的结果有什么共同点? $c^2=2, c^2=8$ 能让我们想起什么?

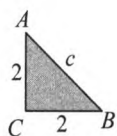
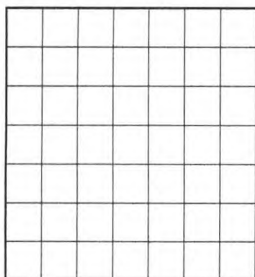
2. 分析方法

问题: 如何验证问题 1(1) 中以 c 为边长的正方形的面积是否为 2?

用网格 1 帮助

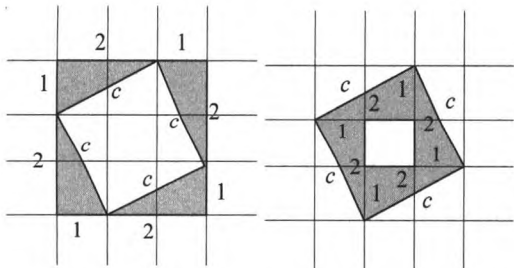
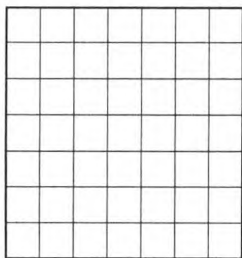
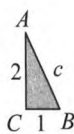


你能用上述方法验证问题1(2)的结论吗?



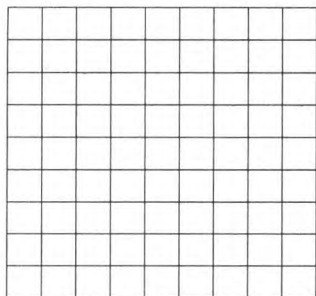
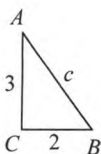
思考:你有哪些方法知道正方形的面积为8?

问题:你能用上述方法帮助解决问题1(3)吗?



思考:你有哪些方法知道正方形的面积为5?

(4)若 $a=2, b=3$.你能求 c^2 吗?



思考:你有哪些方法知道正方形的面积为13?

3. 观察归纳

问题2:(1)梳理上述四个问题的边长,并思考 a, b, c 之间有什么联系?

(2)我们有哪些方法知道正方形的面积?

.....

在此设计中,首先提出本节课的学习任务:探讨直角三角形三边之间的关系,但问题很大,对学生来说有困难,无从下手,如何解决?将问题退回到最简单最特殊的情形,这是我们解决问题的常用策略,很好!但求出等腰直角三角形斜边的平方后,对于非等腰直角三角形斜边的平方采用同样方法无法奏效了,教师只能引导学生去构造以斜边为边长的正方形,这其实还是回到了方格纸的设计难点问题,没有真正突破,且在过程中似乎聚焦的是单个的斜边上的正方形面积,而忽略了最初的问题。

在历史上勾股定理究竟是怎么发现的,是经验的产物还是偶然所得,不得而知.分析比较种种设计我们发现,对于“勾股定理”的探究,要让学生在设置的情境下自然经历勾股定理再发现的过程,或者自己想到利用方格纸转化为正方形的面积看来是不可能的,因此现有的教学设计并不是完全意义上的探究,也不可能实现完全意义上的探究,还是包含了一定成分的接受。

2 探究还是接受

在“勾股定理”教材或教学设计中我们看到了探究学习的力不能及,也看到了接受学习的无可替代,那么在教学中我们该如何对待探究和接受,怎样处理好两者之间的关系?

2.1 对探究本身的认识

首先我们要对探究学习有正确的认识,不要将其与接受学习、发现学习截然分开.什么是探究学习?查阅相关文献,国内外学者对探究学习的解释有很多种.有的将探究学习作为一种学习活动,如施瓦布认为“探究学习是指这样一种学习活动:儿童通过自主地参与知识的获得过程,掌握研究自然所必需的探究能力;同时,形成认识自然的基础——科学概念;进而培养探索世界的积极态度。”^[1]有的将探究学习作为一种学习方法,如人民教育出版社课程教材研究所研究员柴西琴认为,“探究教学实质上是将科学领域的探究引入课堂,使学生通过类似科学家的探究过程理解科学概念和科学探究的本质,并培养科学探究能力的一种特殊的教学方法”。^[2]有的将探究学习作为一种模拟性的科学研究活动,如西南师范大学教授

宋乃庆认为,“探究学习在本质上是一种模拟性的科学研究活动。”^[3]……表述不尽相同但又有共同之处,如关注问题性,探究学习要使学生产生问题意识,提出对学生具有挑战性和吸引力的问题;体现主动性,探究学习强调学生的主动性,学生在探究中始终处于主动状态,从问题的提出、制定问题探究计划,到收集材料处理信息和得出结果验证结论都贯穿了学生的积极思考;凸显过程性,强调学生探索新知识的经历和获得新知的体验等等。

笔者认为,探究学习本质上不是某种新的学习方式,理由有二:

一是,探究学习、自主学习以及合作学习等都是新课程下涌现出来的提法,从课程标准的论述和标准解读来看,这些提法主要是针对传统教学过于强调接受学习、死记硬背、机械训练的现状,而并不是否定传统的学习方式.传统学习方式也有接受学习和发现学习之分,课程标准提倡在传统学习方式的基础上添加一些积极的元素或手段,接受学习也可以含有探究、自主和合作的成分,发现学习亦然,只不过是程度或方式不同而已,因此“探究学习”、“自主学习”、“合作学习”这样的说法只是我们讨论的需要或强调的侧重。

二是,数学学习本身就是一个探究的过程,在数学学习过程中学生要有积极思维的参与,观察、归纳、类比、联想、演绎等等,探究学习必定包含这些数学活动形式,探究学习只是具有问题性、主动性、过程性等一些特征的学习方式,它仍从属于接受学习或发现学习。

2.2 探究或接受的选择

从客观意义上来说,每一种教学方法或教学方式有其相应特点和适用范围,没有一种绝对的或万能的教学方法.在“勾股定理”教学中,“探究”教会学生解决问题的策略,积累数学活动经验,“接受”化解思维难点,节省教学时间,提高了课堂效率.一般来说,选择探究还是接受或以哪种教学方式为主,主要从如下两方面去考虑:

2.2.1 知识内容角度

一方面,从知识的不同表征方式和作用来看,心理学上将知识划分为陈述性知识、程序性知识和策略性知识.^[4]陈述性知识也叫描述性知识,主要说明事物是什么、为什么、怎么样,主要用于区

别和辨别事物;程序性知识,即操作性知识,是指做什么、怎么做,以及解决问题的思维操作过程的知识,主要表现为技能;策略性知识是关于“如何学习、如何思维”的知识,是关于如何使用陈述性知识和程序性知识去学习、记忆、解决问题的一般方法和技巧.如:学习中如何有效记忆,解题时如何找破题点,如何总结解题规律,解决问题时如何明确思维方向等.让学生“学会学习、学会创造”的核心就是策略性知识。

陈述性知识和程序性知识是可以被“告知”的,即可以通过明确表述的程序语言加以外显化,而策略性知识是内隐的、个人化的知识,它不能以文字的方式直接由一个人传递给另一个人,它只能通过学习者亲身的参与、行动或实践,才能逐渐被意会到或被体验到.因此,从理论上来说,陈述性知识和程序性知识是可以讲授的,而策略性知识是学生在“做”的过程中被“悟”出来的.当然,囿于学生的自我感悟能力,有时需要将一些策略性的方法适当地加以外显并通过语言表述,如通过一定的问题思考再加以点拨。

如果过于重视陈述性知识和程序性知识的记忆和操作,则会忽视对它们的理解和策略性知识的领悟.“勾股定理”从其结论来说属于陈述性知识,是可以直接“告知”学生的,但设计相应的数学活动可以增进学生对知识的理解和方法的领悟,其中蕴含着丰富的策略性知识,但这些策略性知识学生又难以自发产生,需要老师通过适当的问题启发引导,因此教材或教学设计中采用以“探究为主,接受为辅”是一种最优的选择。

另一方面,从知识本身的特征来看,有些数学知识来源于数学现实,具有经验性,有些数学知识则是纯粹数学思维的产物,具有超验性,如负数具有经验性,而复数则是超验性的,对前者学生是可以自己探究的,后者学生则不可能探究,只能接受;有些数学知识具有演绎性,可以通过逻辑推理加以证明,有些数学知识只是在数学体系中的一种合乎情理的规定,^[5]如三角形内角和定理具有演绎性,有理数的混合运算法则具有合情性,同样前者可以设计活动让学生自己探究,后者则只能接受了.“勾股定理”具有经验性和演绎性,因此以探究学习为主去设计活动是比较恰当的,只是其中仍包含了一定成分的“接受学习”。

2.2.2 学情状况角度

选择什么样的教学方式还要考虑学生的学情. 如前文所述,探究学习是具有问题性、主动性、过程性等一些特征的学习方式,对学生的认知水平和学习习惯有较高的要求. 从班级整体状况来看,如果班级整体学力水平比较高,且思维比较活跃,建议以探究为主,接受为辅,即在“探究中接受”,如按照这样的过程设计“勾股定理”: $\text{“直角三角形三边之间存在平方关系}\rightarrow\text{画直角三角形测量三边,猜测}\rightarrow\text{方格纸计算正方形面积}\rightarrow\text{形成猜想”}$,探究中包含了接受;如果班级整体学力水平不高,或思维不够活跃,建议以接受为主,探究为

辅,即在“接受中探究”,如按照这样的过程设计“勾股定理”: $\text{“直角三角形三边之间存在平方关系}\rightarrow\text{画直角三角形测量三边,猜测}\rightarrow\text{技术手段准确测量}\rightarrow\text{形成猜想”}$,至于直角三角形三边的关系和正方形的面积关系则可以在结论得到之后,在例题或习题中体现形的一面,接受中也渗透了一定的探究的思想.

从不同年龄段来看,对学生的探究水平也应有不同的要求,即探究的问题、探究的方法应考虑到不同年龄段的学生在思维水平、活动经验等方面的差异. 以初中阶段的“综合与实践”活动为例,可以区分为以下三种探究水平:

水平/内容	研究课题	活动方式	活动要求	案例
水平一(七年级)	明确、具体	以操作性数学活动为主,要求判断、提出猜想并进行说理	独立思考、合作交流;注重探究、逐步积累经验	幻方 ^[6]
水平二(八年级)	主题明确,但具体的研究问题由学生经小组讨论后形成	以抽象、建立数学模型,推理和判断,回顾与反思为主	独立与合作结合、注重探究与推理、积累活动经验	一次函数模型 ^[7]
水平三(九年级)	仅给出现象,明确的主题和需要解决的具体问题由学生经小组讨论后形成	以抽象、推理、判断和设计,回顾与反思为主	独立思考、合作交流、注重推理、积累活动经验	猜想、证明与拓广 ^[8]

考虑到受传统教学模式的影响,教师教学方式的单一,学生在数学思考和问题解决方面的欠缺,目前我们适当向探究学习倾斜是需要的. 当然除了知识内容和学情状况影响之外,采用探究还是接受还取决于多种因素,如具体的教学目标和任务、教学设备、学习环境、教师的能力、风格等. 立足教材,关注学生永远是正确的!

参考文献

[1]钟启泉编译. 现代教学论发展[M]. 北京:教育科学出版社, 1988: 363

[2]柴西琴. 对探究教学的认识与思考[J]. 课程·教材·教法, 2001(8):17

[3]宋乃庆. 中国基础教育新课程的理念与创新[M]. 北京:中国人事出版社,2002:106

[4]巩子坤. 数学知识的特征与学习方式的有效选择[J]. 中国教育月刊,2005(11):55-58

[5]马复主编. 义务教育数学课程标准实验教科书 七上[M]. 北京:北京师范大学出版社,2014:189-190

[6]马复主编. 义务教育数学课程标准实验教科书 八上[M]. 北京:北京师范大学出版社,2014:189-190

[7]马复主编. 义务教育数学课程标准实验教科书 九上[M]. 北京:北京师范大学出版社,2014:166-170

(上接第 13 页)

[5]陈锋,王芳. 基于旦德林双球模型的椭圆定义教学[J]. 数学教学,2012(4):5-8+40

[6]王海青. 从阿波罗尼斯到柯西:“圆锥曲线”研究方法的变迁[J]. 数学通报,2018,56(10):26-31

[7]莫里斯·克莱因. 古今数学思想(第一册)[M]. 张理京,等译. 上海:上海科学技术出版社,2014

[8]阿波罗尼斯著. 圆锥曲线论[M]. 朱恩宽,等译. 西安:陕西科

学技术出版社,2007

[9]霍华德·伊夫斯. 数学史概论[M]. 6 版. 欧阳绛,译. 哈尔滨:哈尔滨工业大学,2013

[10]《数学辞海》编辑委员会. 数学辞海(第六卷)[M]. 太原:山西教育出版社,2002

[11]白尚恕. 圆锥曲线小史[J]. 数学通报,1964(2):36-41

[12]弗莱登塔尔. 数学教育再探[M]. 上海:上海教育出版社,1999