

2020-2021 学年度第一学期高邮中学期中考试

高二数学试卷

2020.11

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 命题 P : “ $\exists n \in \mathbb{N}$, 则 $n^2 > 2^n$ ”的否定是 ()

- A. $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^2 > 2^n$ B. $\exists n \in \mathbb{N}$, $n^2 \leq 2^n$
C. $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^2 \leq 2^n$ D. $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^2 < 2^n$

2. 双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ 的渐近线方程是 ()

- A. $y = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}x$ B. $y = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}x$ C. $y = \pm \frac{4}{5}x$ D. $y = \pm \frac{5}{4}x$

3. 不等式 $ax^2 - 5x + c < 0$ 的解集为 $\{x | 2 < x < 3\}$, 则 a, c 的值为 ()

- A. $a = 6, c = 1$ B. $a = -6, c = -1$
C. $a = 1, c = 6$ D. $a = -1, c = -6$

4. 《张丘建算经》是我国北魏时期大数学家张丘建所著，约成书于公元 466-485 年间。其中记载着这么一道“女子织布”问题：某女子善于织布，一天比一天织得快，且每日增加的数量相同。已知第一日织布 4 尺，20 日共织布 232 尺，则该女子织布每日增加 () 尺

- A. $\frac{4}{7}$ B. $\frac{16}{29}$ C. $\frac{8}{15}$ D. $\frac{4}{5}$

5. 已知椭圆 C 的中心在原点，焦点在 y 轴上，且短轴的长为 2，离心率等于 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ，则该椭圆的标准方程为 ()

- A. $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{4} = 1$ B. $\frac{y^2}{20} + \frac{x^2}{4} = 1$
C. $\frac{y^2}{5} + x^2 = 1$ D. $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$

6. 不等式 $x^2 + 3x + 2 > 0$ 成立的一个必要不充分条件是 ()

- A. $(-1, +\infty)$ B. $[-1, +\infty)$
C. $(-\infty, -2] \cup [-1, +\infty)$ D. $(-1, +\infty) \cup (-\infty, -2)$

7. “蒙日圆”涉及几何学中的一个著名定理,该定理的内容为:椭圆上任意两条互相垂直的切线的交点必在一个与椭圆同心的圆上,该圆称为原椭圆的蒙日圆,若椭圆 $C: \frac{x^2}{a+1} + \frac{y^2}{a} = 1 (a > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 则椭圆 C 的蒙日圆方程为 ()

- A. $x^2 + y^2 = 9$ B. $x^2 + y^2 = 7$ C. $x^2 + y^2 = 5$ D. $x^2 + y^2 = 4$

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = 21$, 且满足 $(2n-5)a_{n+1} = (2n-3)a_n + 4n^2 - 16n + 15$, 则 $\{a_n\}$ 的最小的一项是 ()

- A. a_4 B. a_5 C. a_9 D. a_{10}

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 3 分。

9. 下列函数中, 能取到最小值 2 的是 ()

- A. $y = x + \frac{1}{x} (x < 0)$ B. $y = \frac{1}{e^x} + e^x (x \in \mathbb{R})$
C. $y = \sin x + \frac{4}{\sin x} (\sin x \neq 0)$ D. $y = \frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}} (x \in \mathbb{R})$

10. 下列命题为真命题的是 ()

- A. 若 $a > b > 0$, 则 $ac^2 > bc^2$ B. 若 $a < b < 0$, 则 $a^2 > ab > b^2$
C. 若 $a > b > 0$ 且 $c < 0$, 则 $\frac{c}{a^2} > \frac{c}{b^2}$ D. 若 $a > b$ 且 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, 则 $ab > 0$

11. 首项为正数, 公差为 0 的等差数列 $\{a_n\}$, 其前 n 项和为 S_n , 则下列 4 个命题中正确的有 ()

- A. 若 $S_{10} = 0$, 则 $a_5 > 0, a_6 < 0$;
B. 若 $S_4 = S_{12}$, 则使 $S_n > 0$ 的最大的 n 为 15;
C. 若 $S_{15} > 0, S_{16} < 0$, 则 $\{S_n\}$ 中 S_7 最大;
D. 若 $S_8 < S_9$, 则 $S_7 < S_8$.

12. 在平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上存在点 P , 使得 $PF_1 = 2PF_2$, 其中

F_1, F_2 分别为椭圆的左、右焦点, 则该椭圆的离心率可能为 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{5}$

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 若“ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + a > 0$ ”为真命题，则实数 a 的取值范围是_____。

14. 若正实数 x, y 满足 $x + 2y - xy = 0$ ，则 $2x + y$ 的最小值是_____。

15. 设双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，离心率为 $\sqrt{5}$ 。

P 是 C 上一点，且 $F_1P \perp F_2P$ 。若 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为8，则 $a =$ _____。

16. 已知 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，满足 $S_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n$ ，则 $a_n =$ _____；数列 $\left\{\frac{n+3}{a_n a_{n+1}} \cdot \frac{1}{2^n}\right\}$ 的前 n 项和 $T_n =$ _____。

四、解答题：本题共6小题，共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10分) 已知 $A = \left\{x \mid \frac{1-x}{x-2} > 0\right\}$ ， $B = \{x \mid x^2 - 2x + 1 - m^2 < 0, m > 0\}$ 。

(1) 若 $m = 2$ ，求 $A \cap B$ ；

(2) 若 $x \in A$ 是 $x \in B$ 的充分不必要条件，求实数 m 的取值范围。

18. (12分) 在等差数列 $\{a_n\}$ 中， $a_3 = 7$ ，再从条件① $a_2 + a_6 = 12$ 、条件②设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ， $S_3 = 12$ 这两个条件中选择一个作为已知，

求：(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 求数列 $\{a_n + \frac{1}{2^n}\}$ 的前 n 项和 T_n 。

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分。

19. (12分) 已知椭圆的两个焦点坐标分别是 $(-2, 0)$ ， $(2, 0)$ ，并且经过点 $\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ 。

(1) 求椭圆的标准方程；

(2) 若直线 $y = x + 1$ 与椭圆交于 A, B 两点，求 AB 中点的坐标和 AB 长度。

20. (12分) 已知函数 $f(x) = x + \frac{4}{x-2}$

(1) 当 $x > 2$ 时, 求函数 $f(x)$ 的最小值;

(2) 若存在 $x \in (2, +\infty)$, 使得 $f(x) \leq 9' - 3'$ 成立, 求实数 t 取值范围.

21. (12分) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足公差 $d > 0$, 且 $a_1 a_4 = 27$, $S_4 = 24$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n = 2b_n - 1$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 证明数列 $\{b_n\}$ 为等比数列;

(3) 若 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \geq (2n-1)t + 1$ 恒成立, 求实数 t 的最大值.

22. (12分) 已知椭圆标准方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 且过点 $A(-2, 0)$, 直线 l 与椭圆交于 P, Q 两点且不过原点.

(1) 求椭圆方程;

(2) 若 $AP \perp AQ$, 求证: 直线 l 经过定点, 并求出定点坐标;

(3) 若直线 OP, PQ, OQ 的斜率依次成等比数列, 求 $\triangle OPQ$ 面积的取值范围.