

江苏省仪征中学 2020-2021 学年度第一学期

高二数学热身综合练 (7)

班级: _____ 姓名: _____ 学号: _____

一、选择题 (本大题共 4 小题, 共 20 分)

1. 过抛物线 $y^2 = 4x$ 焦点 F 的直线 l 交抛物线于 A, B 两点 (点 A 在第一象限), 若直线 l 的倾斜角为 60° , 则 $\frac{|AF|}{|BF|}$ 的值为 ()

- A. 2 B. 3 C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{5}{2}$

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列, 若 $a_3 - a_2 = 5$, 则 $a_4 + 8a_2$ 的最小值为 ()

A. 40 B. 20 C. 10 D. 5

3. 已知 F 是椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的左焦点, P 为椭圆 C 上任意一点, 点 $Q(4, 3)$, 则 $|PQ| + |PF|$ 的最大值为 ()

A. $5\sqrt{2}$ B. $3\sqrt{2}$ C. $\sqrt{34}$ D. $4\sqrt{2}$

4.(多选) 下面命题正确的是 ()

- A. “ $a > 1$ ” 是 “ $\frac{1}{a} < 1$ ” 的充分不必要条件
- B. 命题 “任意 $x \in \mathbf{R}$, 则 $x^2 + x + 1 < 0$ ” 的否定是 “存在 $x \in \mathbf{R}$, 则 $x^2 + x + 1 \geq 0$ ”.
- C. 设 $x, y \in \mathbf{R}$, 则 “ $x \geq 2$ 且 $y \geq 2$ ” 是 “ $x^2 + y^2 \geq 4$ ” 的必要而不充分条件
- D. 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 则 “ $a \neq 0$ ” 是 “ $ab \neq 0$ ” 的必要不充分条件

二、填空题 (本大题共 4 小题, 共 20 分)

5. 已知长方体的长、宽、高分别为 $10, 8, 6(\text{cm})$, 则该长方体的外接球的半径 $R =$ _____ (cm) .

6. 已知正数 a, b 满足 $4a + b = 1$, 则 $ab + \frac{1}{ab}$ 的最小值为_____.

7. 点 $P(x, y)$ 满足 $\sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2} = \frac{|3x-4y-6|}{10}$, 则点 P 的轨迹为_____ (曲线类型), 离心率为_____.

8. 已知一族双曲线 $E_n: x^2 - y^2 = \frac{1}{n^2 + n} (n \in \mathbf{N}^*, \text{ 且 } n \leq 2020)$,

设直线 $x=2$ 与 E_n 在第一象限内的交点为 A_n , 由 A_n 向 E_n 的两条渐近线作垂线, 垂足分别为 B_n, C_n . 记 $\triangle A_n B_n C_n$ 的面积为 a_n , 则 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2020} =$ _____.

三、解答题 (本大题共 3 小题, 共 36 分)

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且满足 $a_1 = \frac{1}{2}, S_n = 1 - 2a_{n+1}, n \in \mathbf{N}^*$.

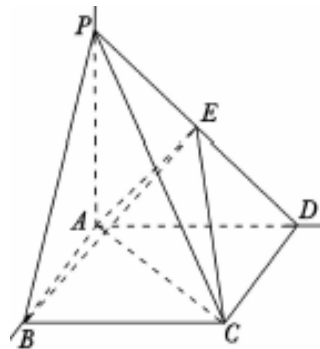
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $b_n = \log_{\frac{1}{2}} a_n$, 且 $c_n = \frac{1}{4b_n^2 - 1}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

10. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，四边形 $ABCD$ 是长方形，平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$ ，平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$ ，

(1) 证明： $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ；

(2) 若 $PA = AD = 2, AB = 3$ ， E 为 PD 中点，求二面角 $A-BE-C$ 的余弦值.



11. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 左右顶点分别为 A, B , 上下顶点分别为 C, D , 四边形 $ACBD$ 的面积为 $4\sqrt{3}$,

(1) 求椭圆的方程;

(2) 过椭圆的右焦点 F 的直线 l 与椭圆交于 P, Q 两点, 直线 PB, QB 分别交直线 $x = 4$ 于 M, N 两点, 判断 $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BN}$ 是否为定值, 并说明理由.

江苏省仪征中学 2020-2021 学年度第一学期 高二数学热身综合练(7) 参考答案

二、选择题(本大题共 4 小题, 共 20 分)

1. 过抛物线 $y^2 = 4x$ 焦点 F 的直线 l 交抛物线于 A, B 两点(点 A 在第一象限), 若直线 l 的倾斜角为 60° , 则 $\frac{|AF|}{|BF|}$ 的值为 () B

B. 2 B. 3 C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{5}{2}$

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列, 若 $a_3 - a_2 = 5$, 则 $a_4 + 8a_2$ 的最小值为 () A

A. 40 B. 20 C. 10 D. 5

3. 已知 F 是椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的左焦点, P 为椭圆 C 上任意一点, 点 $Q(4, 3)$, 则

$|PQ| + |PF|$ 的最大值为 () A

A. $5\sqrt{2}$ B. $3\sqrt{2}$ C. $\sqrt{34}$ D. $4\sqrt{2}$

4.(多选) 下面命题正确的是 () ABD

A. “ $a > 1$ ” 是 “ $\frac{1}{a} < 1$ ” 的充分不必要条件

B. 命题 “任意 $x \in \mathbf{R}$, 则 $x^2 + x + 1 < 0$ ” 的否定是 “存在 $x \in \mathbf{R}$, 则 $x^2 + x + 1 \geq 0$ ”.

C. 设 $x, y \in \mathbf{R}$, 则 “ $x \geq 2$ 且 $y \geq 2$ ” 是 “ $x^2 + y^2 \geq 4$ ” 的必要而不充分条件

D. 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 则 “ $a \neq 0$ ” 是 “ $ab \neq 0$ ” 的必要不充分条件

二、填空题(本大题共 4 小题, 共 20 分)

5. 已知长方体的长、宽、高分别为 10, 8, 6(cm), 则该长方体的外接球的半径 $R =$ _____ (cm). $5\sqrt{2}$

6. 已知正数 a, b 满足 $4a + b = 1$, 则 $ab + \frac{1}{ab}$ 的最小值为 _____. $\frac{257}{16}$

7. 点 $P(x, y)$ 满足 $\sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2} = \frac{|3x-4y-6|}{10}$, 则点 P 的轨迹为 _____
离心率为 _____. 椭圆 $\frac{1}{2}$

8. 已知一族双曲线 $E_n: x^2 - y^2 = \frac{1}{n^2 + n} (n \in \mathbf{N}^*, \text{ 且 } n \leq 2020)$,

设直线 $x = 2$ 与 E_n 在第一象限内的交点为 A_n , 由 A_n 向 E_n 的两条渐近线作垂线, 垂足分别为 B_n, C_n . 记 $\triangle A_n B_n C_n$ 的面积为 a_n , 则 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2020} =$ _____.

$\frac{2021}{8088}$

三、解答题（本大题共 3 小题，共 36 分）

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且满足 $a_1 = \frac{1}{2}$ ， $S_n = 1 - 2a_{n+1}, n \in N^*$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 若 $b_n = \log_{\frac{1}{2}} a_n$ ，且 $c_n = \frac{1}{4b_n^2 - 1}$ ，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

解：(1) 因为 $S_n = 1 - 2a_{n+1}$ ， $\therefore S_{n-1} = 1 - 2a_n$ ， $(n \geq 2)$ ，两式相减得 $2a_{n+1} = a_n$ ， $(n \geq 2)$...2分

因为 $a_1 = \frac{1}{2}$ ， $S_n = 1 - 2a_{n+1}$ ，所以令 $n=1$ ，则可得 $a_2 = \frac{1}{2}(1 - a_1) = \frac{1}{4}$ 所以 $\frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{2}$

又 $a_1 = \frac{1}{2} \neq 0$ ， $a_2 = \frac{1}{4} \neq 0$ ， $2a_{n+1} = a_n$ ， $\therefore a_n \neq 0 (n \in N^*)$ ， $\therefore \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$ ， $(n \in N^*)$ ，...5分

所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 $\frac{1}{2}$ 、公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列，所以 $a_n = (\frac{1}{2})^n$ 6分

注：结果 $a_n = (\frac{1}{2})^n$ 对，但没有说明 $\frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{2}$ 的扣 2 分

(2) 因为 $a_n = (\frac{1}{2})^n$ ，所以 $b_n = \log_{\frac{1}{2}} a_n = n$ 7分

所以 $c_n = \frac{1}{4b_n^2 - 1} = \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$ 9分

所以 $T_n = c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_n = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right]$
 $= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{n}{2n+1}$ 12分

10. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，四边形 $ABCD$ 是长方形，平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$ ，平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$ ，

(1) 证明： $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ；

(2) 若 $PA = AD = 2, AB = 3$ ， E 为 PD 中点，求二面角 $A-BE-C$ 的余弦值。

(1) 证明： $\because$ 四边形 $ABCD$ 为长方形， $\therefore AB \perp AD$ ，

$\because$ 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$ ，平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$ ， $AB \subset$ 平面 $ABCD$

$\therefore AB \perp$ 平面 PAD 3分

$\because PA \subset$ 平面 $PAD \therefore AB \perp PA$ 。同理 $AD \perp PA$ ，

又 $AB \cap AD = A$ ， $AB \subset$ 平面 $ABCD, AD \subset$ 平面 $ABCD, \therefore PA \perp$ 平面 $ABCD$ 。5分

(2) 以 A 为坐标原点， AB, AD, AP 所在直线分别为 x, y, z 轴，建立空间直角坐标系 ...6分

则 $A(0,0,0), B(3,0,0), D(0,2,0), C(3,2,0), E(0,1,1), P(0,0,2)$,
 设 $\vec{m} = (x, y, z)$ 为平面 ABE 的法向量,

$$\therefore \begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{m} \cdot \vec{AE} = 0 \end{cases} \therefore \begin{cases} y + z = 0 \\ x = 0 \end{cases}, \text{ 令 } y = 1, \text{ 则 } z = -1,$$

$\therefore$ 平面 ABE 的一个法向量 $\vec{m} = (0, 1, -1)$8 分

同理可求得平面 BCE 的一个法向量 $\vec{n} = (1, 0, 3)$,10 分

$$\therefore \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = -\frac{3\sqrt{20}}{20}. \quad \because \text{二面角 } A-BE-C \text{ 的大小为钝角}$$

$$\therefore \text{二面角 } A-BE-C \text{ 的余弦值为 } -\frac{3\sqrt{20}}{20}. \quad \text{.....12 分}$$

注: 错将二面角的余弦值写成 $\frac{3\sqrt{20}}{20}$ 的扣 1 分

11. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 左右顶点分别为 A, B , 上下顶点分别为 C, D , 四边形 $ACBD$ 的面积为 $4\sqrt{3}$,

(1) 求椭圆的方程;

(2) 过椭圆的右焦点 F 的直线 l 与椭圆交于 P, Q 两点, 直线 PB, QB 分别交直线 $x = 4$ 于 M, N 两点, 判断 $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BN}$ 是否为定值, 并说明理由.

解: (1) 由题意得

$$\begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \\ a^2 = b^2 + c^2, \\ 2ab = 4\sqrt{3} \end{cases} \quad \text{.....2 分}$$

解得 $a = 2, b = \sqrt{3}$, 所以椭圆 C 的方程为

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1. \quad \text{.....4 分}$$

(2) 方法 1: 若直线 l 的斜率不存在, 则直线 l 方程为 $x = 1$,

此时可得 $P(1, \frac{3}{2}), Q(1, -\frac{3}{2}), M(4, -3), N(4, 3)$, 所以

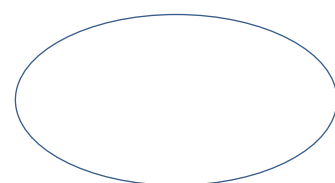
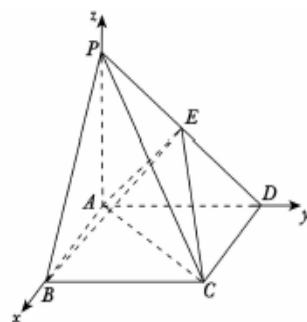
$$\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BN} = -5. \quad \text{.....5 分}$$

若直线 l 的斜率存在, 设直线 l 的方程为 $y = k(x-1) (k \neq 0)$, 代入 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 整理得

$$(3+4k^2)x^2 - 8k^2x + 4k^2 - 12 = 0, \text{ 易得 } \Delta \geq 0 \text{ 恒成立.}$$

设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2), (x_1, x_2 \neq 2)$, 则

$$x_1 + x_2 = \frac{8k^2}{3+4k^2}, x_1 x_2 = \frac{4k^2 - 12}{3+4k^2}, \quad \text{.....7 分}$$



由直线 PB 的方程 $y = \frac{y_1}{x_1 - 2}(x - 2)$ 可得点 $M(4, \frac{2y_1}{x_1 - 2})$,

由直线 QB 的方程 $y = \frac{y_2}{x_2 - 2}(x - 2)$ 可得点 $N(4, \frac{2y_2}{x_2 - 2})$,

所以 $\overrightarrow{BM} = (2, \frac{2y_1}{x_1 - 2})$, $\overrightarrow{BN} = (2, \frac{2y_2}{x_2 - 2})$ 8 分

所以

$$\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BN} = 4 + \frac{2y_1}{x_1 - 2} \cdot \frac{2y_2}{x_2 - 2} = 4 + 4k^2 \frac{x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1}{x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4} \dots\dots\dots$$

.....9 分

$$= 4 + 4k^2 \frac{4k^2 - 12 - 8k^2 + 4k^2 + 3}{4k^2 - 12 - 2 \times 8k^2 + 4(4k^2 + 3)} = 4 + 4k^2 \times \frac{-9}{4k^2} = -5$$

综上, $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BN}$ 为定

值.12 分

方法 2: 显然直线 l 的斜率不为 0, 设直线 l 的方程为 $x = my + 1$, 代入 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 整理得

$(3m^2 + 4)y^2 + 6my - 9 = 0$, 易得 $\Delta \geq 0$ 恒成立.

设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2), (x_1, x_2 \neq 2)$, 则

$$y_1 + y_2 = \frac{-6m}{3m^2 + 4}, y_1 y_2 = \frac{-9}{3m^2 + 4}, \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

由直线 PB 的方程 $y = \frac{y_1}{x_1 - 2}(x - 2)$ 可得点 $M(4, \frac{2y_1}{x_1 - 2})$,

由直线 QB 的方程 $y = \frac{y_2}{x_2 - 2}(x - 2)$ 可得点 $N(4, \frac{2y_2}{x_2 - 2})$,

所以 $\overrightarrow{BM} = (2, \frac{2y_1}{x_1 - 2})$, $\overrightarrow{BN} = (2, \frac{2y_2}{x_2 - 2})$ 8 分

所以

$$\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BN} = 4 + \frac{2y_1}{x_1 - 2} \cdot \frac{2y_2}{x_2 - 2} = 4 + \frac{4y_1 y_2}{m^2 y_1 y_2 - m(y_1 + y_2) + 1} \dots\dots\dots$$

...9 分

$$= 4 + \frac{-36}{-9m^2 + 6m^2 + 3m^2 + 4} = 4 - 9 = -5 \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$