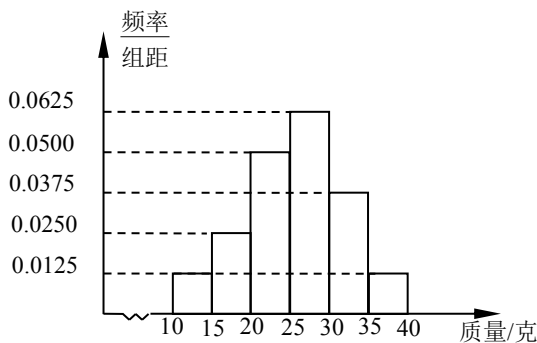


仪征中学 2019 届高三考前数学保温练 2

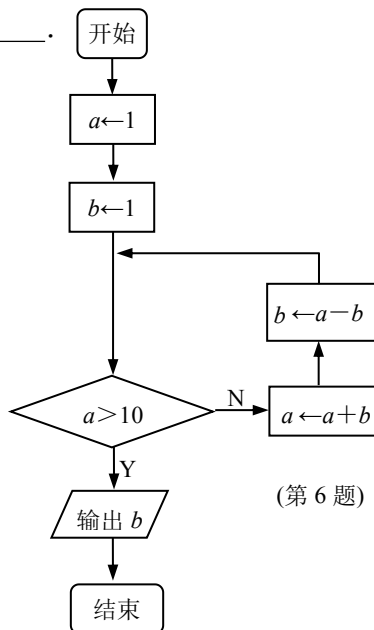
班级 _____ 姓名 _____ 学号 _____ 评价 _____

一、填空题：

1. 设全集 $U = \{x | x < 5, x \in \mathbf{N}^*\}$ ，集合 $A = \{1, 2\}$ ， $B = \{2, 4\}$ ，则 $\complement_U(A \cup B) =$ _____.
2. 复数 $z = \frac{-i}{2+i}$ (i 为虚数单位) 在复平面内对应的点在第 _____ 象限.
3. 将一个质地均匀的骰子(一种各个面上分别标有 1, 2, 3, 4, 5, 6 个点的正方体玩具)先后抛掷 2 次，则出现向上的点数之和大于 10 的概率为 _____.
4. 对一批产品的质量(单位：克)进行抽样检测，样本容量为 800，检测结果的频率分布直方图如图所示. 根据标准，单件产品质量在区间 $[25, 30)$ 内为一等品，在区间 $[20, 25)$ 和 $[30, 35)$ 内为二等品，其余为次品. 则样本中次品件数为 _____.



(第 4 题)



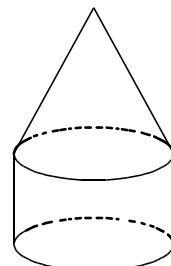
(第 6 题)

5. 在平面直角坐标系 xOy 中，若抛物线 $y^2 = 2px$ 的焦点恰好是双曲线 $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$ 的右焦点，则该抛物线的准线方程为 _____.

6. 如图是一个算法流程图，则输出的 b 的值为 _____.

7. 设数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，其前 n 项和为 S_n ，已知 $a_1 + a_4 + a_7 = 60$ ， $a_2 + a_5 + a_8 = 51$ ，若对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ ，都有 $S_n \leq S_k$ 成立，则正整数 k 的值为 _____.

8. 如图，该几何体由底面半径相同的圆柱与圆锥两部分组成，且圆柱的高与底面半径相等. 若圆柱与圆锥的侧面积相等，则圆锥与圆柱的高之比为 _____.



(第 8 题)

9. 在平面直角坐标系 xOy 中，圆 C 经过 $M(1, 3)$ ， $N(4, 2)$ ， $P(1, -7)$ 三点，且直线 $l: x + ay - 1 = 0$ ($a \in \mathbf{R}$) 是圆 C 的一条对称轴，过点 $A(-6, a)$ 作圆 C 的一条切线，切点为 B ，则线段 AB 的长度为 _____.

10. 已知菱形 $ABCD$ 中, 对角线 $AC = \sqrt{3}$, $BD = 1$, P 是 AD 边上的动点 (包括端点), 则 $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC}$ 的取值范围为_____.

二、解答题:

1. 已知函数 $f(x) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos x$.

(1) 若 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, 求函数 $f(x)$ 的值域;

(2) 设 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 若 A 为锐角且 $f(A) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $b=2$, $c=3$, 求 $\cos(A-B)$ 的值.

2. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 短轴长为 2.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 设 P 为椭圆上顶点, 点 A 是椭圆 C 上异于顶点的任意一点, 直线 PA 交 x 轴于点 M . 点 B 与点 A 关于 x 轴对称, 直线 PB 交 x 轴于点 N . 问: 在 y 轴的正半轴上是否存在点 Q , 使得 $\angle OQM = \angle ONQ$? 若存在, 求点 Q 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

三、附加题：

1. 在平面直角坐标系 xOy 中，圆 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 3 + 2\cos\theta, \\ y = -4 + 2\sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数).

(1) 以原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，求圆 C 的极坐标方程；

(2) 已知 $A(-2, 0)$, $B(0, 2)$ ，圆 C 上任意一点 $M(x, y)$ ，求 $\triangle ABM$ 面积的最大值.

2. 一个暗箱中有形状和大小完全相同的 3 只白球与 2 只黑球，每次从中取出一只球，取到白球得 2 分，取到黑球得 3 分. 甲从暗箱中有放回地依次取出 3 只球.

(1) 求甲三次都取得白球的概率；

(2) 求甲总得分 ξ 的分布列和数学期望.

仪征中学 2019 届高三考前数学保温练 2 答案

一、填空题：

1. {3} 2. 三 3. $\frac{1}{12}$ 4. 200 5. $x = -2\sqrt{3}$ 6. 8 7. 10 8. $\sqrt{3}$ 9. $2\sqrt{7}$ 10. $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$

二、解答题：

1. 解：(1) $f(x) = (\sin x + \sqrt{3}\cos x)\cos x = \sin x \cos x + \sqrt{3}\cos^2 x$,

$$= \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \dots\dots 2 \text{ 分}$$

由 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 得, $\frac{\pi}{3} \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{5\pi}{6}$, 故 $\frac{1}{2} \leq \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1$, 所以函数 $f(x)$ 的值域为 $\left[\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{2+\sqrt{3}}{2}\right]$.

(2) 由 $f(A) = \sin\left(2A + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}$, 得 $\sin\left(2A + \frac{\pi}{3}\right) = 0$, \dots\dots 6 \text{ 分}

又 $0 < A < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\frac{\pi}{3} < 2A + \frac{\pi}{3} < \frac{4\pi}{3}$, 所以 $2A + \frac{\pi}{3} = \pi$, 即 $A = \frac{\pi}{3}$, \dots\dots 8 \text{ 分}

由余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = 7$, 得 $a = \sqrt{7}$,

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, 得 $\sin B = \frac{b\sin A}{a} = \frac{\sqrt{21}}{7}$, \dots\dots 10 \text{ 分}

因为 $b < a$, 所以 $B < A$, 所以 $\cos B = \sqrt{1 - \sin^2 B} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{21}}{7}\right)^2} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$, \dots\dots 12 \text{ 分}

所以 $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B = \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{7}}{7} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{21}}{7} = \frac{5\sqrt{7}}{14}$. \dots\dots 14 \text{ 分}

2. 解：(1) 设椭圆的焦距为 $2c$, 由题可知
$$\begin{cases} b=1, \\ \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ a^2 = b^2 + c^2, \end{cases} \quad \text{解得 } a^2 = 4.$$

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. \dots\dots 4 \text{ 分}

(2) 设 $B(m, n) (mn \neq 0)$, $M(x_M, 0)$, 则直线 BP 的方程为 $y - 1 = \frac{n-1}{m}x$.

令 $y=0$, 得 $x_N = \frac{m}{1-n}$, 即 $N\left(\frac{m}{1-n}, 0\right)$. \dots\dots 6 \text{ 分}

因为点 A 与点 B 关于 x 轴对称, 所以 $A(m, -n)$.

设 $M(x_M, 0)$, 同理得 $x_M = \frac{m}{1+n}$. \dots\dots 8 \text{ 分}

假设存在点 $Q(0, y_Q)$, 使得 $\angle OQM = \angle ONQ$ 恒成立.

由 $\tan \angle OQM = \tan \angle ONQ$, 得 $\frac{|x_M|}{|y_Q|} = \frac{|y_Q|}{|x_N|}$, 即 $y_Q^2 = |x_M||x_N|$. \dots\dots 10 \text{ 分}

因为 $x_N = \frac{m}{1-n}$, $x_M = \frac{m}{1+n}$, $\frac{m^2}{4} + n^2 = 1$, 所以 $y_Q^2 = |x_M||x_N| = \frac{m^2}{1-n^2} = 4$.

又 $y_Q > 0$, 所以 $y_Q = 2$. 经验证, 当 $y_Q = 2$ 时, $\angle OQM = \angle OQR$.

所以 y 轴的正半轴上存在点 $Q(0, 2)$, 使得 $\angle OQM = \angle OQR$ 恒成立. \dots\dots 14 \text{ 分}

三、附加题：

1. 解：（1）圆 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=3+2\cos \theta, \\ y=-4+2\sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数),

所以普通方程为 $(x-3)^2+(y+4)^2=4$.

$x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$, 可得 $(\rho\cos\theta-3)^2+(\rho\sin\theta+4)^2=4$,

化简, 圆 C 的极坐标方程为 $\rho^2-6\rho\cos\theta+8\rho\sin\theta+21=0$4 分

（2）点 $M(x, y)$ 到直线 $AB: x-y+2=0$ 的距离为 $d=\frac{|2\cos \theta-2\sin \theta+9|}{\sqrt{2}}$,6 分

$\triangle ABM$ 的面积 $S=\frac{1}{2}\times |AB|\times d=|2\cos\theta-2\sin\theta+9|=\left|2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)+9\right|$,

所以 $\triangle ABM$ 面积的最大值为 $9+2\sqrt{2}$10 分

2. 解：（1）记事件 A 表示甲取球时取得白球, 则 $P(A)=\frac{C_3^1}{C_5^1}=\frac{3}{5}$2 分

所以甲三次都取得白球的概率为 $P=\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{27}{125}$4 分

（2）甲总得分情况有 6 分, 7 分, 8 分, 9 分四种可能, 记 ξ 为甲总得分.

$P(\xi=6)=\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{27}{125}, P(\xi=7)=C_3^1\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{54}{125},$

$P(\xi=8)=C_3^2\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)=\frac{36}{125}, P(\xi=9)=\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{8}{125}.$ 8 分

ξ	6	7	8	9
$P(x=\xi)$	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

甲总得分 ξ 的期望:

$E(\xi)=6\times\frac{27}{125}+7\times\frac{54}{125}+8\times\frac{36}{125}+9\times\frac{8}{125}=\frac{36}{5}.$ 10 分

仪征中学 2019 届高三考前数学保温练 2 备用题

1. 已知实数 $a, b \in (0, 2)$, 且满足 $a^2 - b^2 - 4 = \frac{4}{2^b} - 2^a - 4b$, 则 $a + b$ 的值为_____.

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 其前 n 项和为 S_n , 且 $2S_{n+1} - 3S_n = 2a_1, n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 求证: 数列 $\{a_n\}$ 为等比数列;

(2) 若 a_1 与 $a_t (t \text{ 为常数}, t \geq 3, t \in \mathbf{N}^*)$ 均为正整数, 且存在正整数 q , 使得 $a_1 \geq q^{t-1}$,

$$a_t \leq (q+1)^{t-1}, \text{ 求 } a_1 \text{ 的值.}$$

解: (1) 由 $2S_{n+1} - 3S_n = 2a_1$ 得 $2S_{n+2} - 3S_{n+1} = 2a_1$,

$$\text{两式相减得 } 2a_{n+2} = 3a_{n+1}, \text{ 即 } \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{3}{2}. \quad \cdots\cdots 3 \text{ 分}$$

$$\text{又 } 2S_2 - 3S_1 = 2a_1, \text{ 得 } \frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{2}.$$

$$\text{综上, } \{a_n\} \text{ 是公比为 } \frac{3}{2} \text{ 的等比数列.} \quad \cdots\cdots 6 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 因为 } a_t = a_1 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{t-1}, \text{ 且 } a_1 \text{ 与 } a_t \text{ 均为正整数,}$$

$$\text{所以 } a_1 \text{ 是 } 2^{t-1} \text{ 的倍数, 不妨设 } a_1 = k \cdot 2^{t-1}, k \in \mathbf{N}^*, \text{ 故 } a_t = k \cdot 3^{t-1}. \quad \cdots\cdots 8 \text{ 分}$$

$$\text{由 } a_t \leq (q+1)^{t-1} \text{ 得 } (q+1)^{t-1} \geq k \cdot 3^{t-1} \geq 3^{t-1}, \text{ 于是 } q \geq 2. \quad \cdots\cdots 10 \text{ 分}$$

$$\text{又因为 } a_1 \geq q^{t-1}, a_t \leq (q+1)^{t-1} \text{ 得 } \frac{a_t}{a_1} \leq \frac{(q+1)^{t-1}}{q^{t-1}}, \text{ 于是 } \left(\frac{3}{2}\right)^{t-1} \leq \frac{(q+1)^{t-1}}{q^{t-1}},$$

$$\text{从而 } \frac{3}{2} \leq \frac{q+1}{q}, \text{ 即 } q \leq 2. \quad \cdots\cdots 12 \text{ 分}$$

$$\text{由上可知: } q = 2.$$

$$\text{所以由 } a_t = a_1 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{t-1} \leq 3^{t-1} \text{ 知 } a_1 \leq 2^{t-1}, \text{ 又 } a_1 \geq 2^{t-1}.$$

$$\text{所以 } a_1 = 2^{t-1}. \quad \cdots\cdots 16 \text{ 分}$$

3. 设 $n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 若 $S_n = \sum_{k=0}^n C_{2n}^{2k}$, 求 S_{2019} 的值;

(2) 若 $T_n = \sum_{k=0}^n C_{3n}^{3k}$, 求 T_{2019} 的值.

解: (1) 因为 $(x-1)^{2n} = C_{2n}^0 x^{2n} (-1)^0 + C_{2n}^1 x^{2n-1} (-1)^1 + C_{2n}^2 x^{2n-2} (-1)^2 + \cdots + C_{2n}^{2n} x^0 (-1)^{2n}$,

令 $x=1$, 则 $C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + C_{2n}^2 - C_{2n}^3 + \cdots + C_{2n}^{2n} = 0$,

即 $C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + \cdots + C_{2n}^{2n} = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \cdots + C_{2n}^{2n-1}$,2 分

而 $C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 + \cdots + C_{2n}^{2n} = 2^{2n}$,

所以 $S_n = \sum_{k=0}^n C_{2n}^{2k} = 2^{2n-1}$, 故 $S_{2019} = 2^{4037}$4 分

(2) 因为 $T_n = C_{3n}^0 + C_{3n}^3 + C_{3n}^6 + \cdots + C_{3n}^{3n}$,

当 $1 \leq k \leq n$, $k \in \mathbf{N}^*$ 时, $C_{3n+3}^{3k} = C_{3n+2}^{3k} + C_{3n+2}^{3k-1} = C_{3n+1}^{3k} + C_{3n+1}^{3k-1} + C_{3n+1}^{3k-1} + C_{3n+1}^{3k-2}$

$= C_{3n+1}^{3k} + 2C_{3n+1}^{3k-1} + C_{3n+1}^{3k-2} = C_{3n}^{3k} + C_{3n}^{3k-1} + 2(C_{3n}^{3k-1} + C_{3n}^{3k-2}) + C_{3n}^{3k-2} + C_{3n}^{3k-3}$

$= C_{3n}^{3k} + 3(C_{3n}^{3k-1} + C_{3n}^{3k-2}) + C_{3n}^{3k-3}$,6 分

故 $T_{n+1} = C_{3n+3}^0 + C_{3n+3}^3 + C_{3n+3}^6 + \cdots + C_{3n+3}^{3n+3}$

$= C_{3n+3}^0 + C_{3n+3}^{3n+3} + 3(C_{3n}^1 + C_{3n}^2 + C_{3n}^4 + \cdots + C_{3n}^{3n-2} + C_{3n}^{3n-1}) + T_n - C_{3n}^0 + T_n - C_{3n}^{3n}$

$= 2T_n + 3(2^{3n} - T_n)$

$= 3 \times 8^n - T_n$,

所以 $T_{n+1} - \frac{1}{3} \times 8^{n+1} = -(T_n - \frac{1}{3} \times 8^n)$,8 分

又因为 $T_1 = 2$, 所以 $T_n - \frac{1}{3} \times 8^n = -\frac{2}{3} \cdot (-1)^{n-1}$,

故 $T_n = \frac{1}{3} \times 8^n - \frac{2}{3} \cdot (-1)^{n-1}$, 所以 $T_{2019} = \frac{8^{2019} - 2}{3}$10 分