用函数图象和代数运算的方法研究“幂指对”函数

章建跃

（人民教育出版社 课程教材研究所 100081）

前面讨论了一般的函数概念和性质的内容理解和教学问题，因为“函数是描述客观世界中变量关系和规律的最为基本的数学语言和工具”，所以我们从语言学习的角度阐释了教学中应关注的问题，也就是要让学生学会这一套“数学的话语方式”，理解其内涵，通过模仿、重复和运用等熟悉起来，逐步达到灵活运用．接下来就是运用这套“话语方式”，从客观世界的变量关系和规律中去抽象基本初等函数，用函数的语言表达，用函数图象和代数运算的方法研究性质，并用于解决数学内外的问题．这个过程既是函数一般概念的应用，同时也在应用过程中加深对函数概念的理解.

1　课程定位

课程标准指出，幂函数、指数函数与对数函数是最基本的、应用最广泛的函数，是进一步学习数学的基础．本单元的学习，可以帮助学生学会用函数图象和代数运算的方法研究这些函数的性质；理解这些函数中所蕴含的运算规律；运用这些函数建立模型，解决简单的实际问题，体会这些函数在解决实际问题中的作用.

课程标准强调了如下几点：

第一，这三个函数具有基础性地位，不仅应用广泛，而且是进一步学习数学的基础，所以非常重要.

第二，研究这些函数的方法是数形结合，即代数运算和图象直观.

第三，通过这些函数的研究，要使学生理解这些函数中所蕴含的运算规律，这里的运算规律主要是指数幂的运算规律、对数的运算规律，这些规律同时反映在指数函数和对数函数中.

第四，要加强运用这些函数建立模型解决实际问题.

2　课程标准提出的内容与要求

1. 幂函数

通过具体实例，结合 $y=x$，$y=\frac{1}{x}$，$y=x^2$，$y=\sqrt{x}$，$y=x^3$ 的图象，理解它们的变化规律，了解幂函数.

2. 指数函数

(1)通过对有理数指数幂 $a^{\frac{m}{n}}$（$a>0$ 且 $a\neq1$；m,n 为整数，且 $n>0$）、实数指数幂 a^x（$a>0$ 且 $a\neq1$；$x\in\mathbf{R}$）含义的认识，了解指数幂的拓展过程，掌握指数幂的运算性质.

(2)通过具体实例，了解指数函数的实际意义，理解指数函数的概念.

(3)能用描点法或借助计算工具画出具体指数函数的图象，探索并理解指数函数的单调性与特殊点.

3. 对数函数

(1)理解对数的概念和运算性质，知道用换底公式能将一般对数转化成自然对数或常用对数.

(2)通过具体实例，了解对数函数的概念．能用描点法或借助计算工具画出具体对数函数的图象，探索并了解对数函数的单调性与特殊点.

(3)知道对数函数 $y=\log_a x$ 与指数函数 $y=a^x$ 互为反函数（$a>0$ 且 $a\neq1$）.

(4)* 收集、阅读对数概念的形成与发展的历史资料，撰写小论文，论述对数发明的过程以及对数对简化运算的作用.

4. 二分法与求方程近似解

(1)结合学过的函数图象，了解函数零点与方程解的关系.

(2)结合具体连续函数及其图象的特点,了解函数零点存在定理,探索用二分法求方程近似解的思路并会画程序框图,能借助计算工具用二分法求方程近似解,了解用二分法求方程近似解具有一般性.

5. 函数与数学模型

(1)理解函数模型是描述客观世界中变量关系和规律的重要数学语言和工具.在实际情境中,会选择合适的函数类型刻画现实问题的变化规律.

(2)结合现实情境中的具体问题,利用计算工具,比较对数函数、一元一次函数、指数函数增长速度的差异,理解"对数增长"、"直线上升""指数爆炸"等术语的现实含义.

(3)收集、阅读一些现实生活、生产实际或者经济领域中的数学模型,体会人们是如何借助函数刻画实际问题的,感悟数学模型中参数的现实意义.

从上述内容和要求可见,课程标准不要求对一般幂函数进行研究,只要通过五个具体函数了解幂函数即可.实际上,这五个具体函数都有现实背景,而且 $y=x,y=\frac{1}{x},y=x^2$ 都是初中研究过的,这里要从新的角度进行研究.另外,研究一元函数的导数、导数公式和运算法则等,常以这五个函数为例.

指数函数与指数幂的概念和运算性质(指数律)紧密相关,对数函数与对数概念和运算性质紧密相关,指数函数与对数函数互为反函数,这是这一内容的显著特点,如何在教材编写和教学中体现好"用代数运算研究这些函数的性质"的要求,需要深入思考.

函数的应用,二分法与求方程的近似解是数学内部的应用,数学模型是数学用于解决实际问题.因为现实中对数增长、直线上升、指数爆炸的现象大量存在,所以幂函数、指数函数和对数函数在实际应用中非常普遍,这是培养学生数学建模素养的重要载体.

3 本单元的认知基础分析

本单元内容的学习基础主要来自以下几方面:

初中阶段,在"有理数"一章中学习了乘方概念:"求 n 个相同因数的积的运算,叫做乘方,乘方的结果叫做幂.在 a^n 中,a 叫做底数,n 叫做指数,当 a^n 看作 a 的 n 次方的结果时,也可读作 a 的 n 次幂."这个概念是本单元的奠基.在整式的乘法中,学习了 $a^m\cdot a^n=a^{m+n},(a^m)^n=a^{mn},(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n$,其中 m,n 是正整数;通过正整数指数幂的运算性质和除法运算,定义了0指数幂;在"使正整数指数幂的运算性质在整数范围内也成立"的原则下,通过定义 $a^{-n}=\frac{1}{a^n}(n\in\mathbf{Z},a\neq0)$(其实是利用正整数指数幂定义负整数指数幂),把指数范围从自然数推广到全体整数.

在"预备知识"主题中,学生经历了梳理二次函数知识,学习用函数观点看一元二次方程和一元二次不等式,建立二次函数与一元二次方程、一元二次不等式的联系,进而用二次函数的性质解一元二次不等式的过程,从中感悟了数学知识之间的关联,认识了函数的重要性,积累了用函数图象、代数运算研究函数性质的经验.

在"函数概念与性质"中,学生经历了分析具体实例、归纳共同特征、抽象概括函数的一般概念的过程,知道了函数不仅可以理解为刻画变量之间依赖关系的数学语言和工具,也是两个实数集之间的对应关系,感悟了数学抽象的层次性;在已有的通过图象直观研究函数性质的经验基础上,进一步学习了用代数运算揭示函数的单调性、奇偶性、最大(小)值等主要性质的方法.

所以,学生已经具有一定的学习本单元的认知基础,但在数学知识基础上,学生还没有实数指数幂的概念,所以应该先对整数指数幂概念进行推广,得出指数幂的运算性质,以使指数函数的定义域为 $\mathbf{R}$,成为连续函数,并为研究指数函数的性质打下基础.同样的,在对数函数之前需要先建立对数的概念,掌握对数的运算性质.

顺便提及幂函数与实数指数幂的位置问题.如果从严格的逻辑性要求考虑,归纳五个幂函数 $y=x,y=\frac{1}{x},y=x^2,y=\sqrt{x},y=x^3$ 的共性需要把 $\sqrt{x}$ 写成 $x^{\frac{1}{2}}$,这里要用到有理数指数幂的概念,所以幂函数应该安排在实数指数幂之后.但考虑到课程标准只要求通过这五个函数的图象理解它们的变化规律,而画函数 $y=\sqrt{x}$ 的图象不需要实数

指数幂概念，归纳幂函数概念时只要说明一下 $\sqrt{x}$ 可以写成 $x^{\frac{1}{2}}$，更主要的是考虑到从实数指数幂到指数函数中间不要被打断，所以人教 A 版教材将幂函数安排在“函数的概念与性质”的后面，作为用函数的一般概念研究一类函数的具体例子，让学生了解具体函数类的研究内容、过程(定义、表示——图象与性质——应用)和方法，把指数与指数函数、对数与对数函数放在一起，让学生进行连续的学习.

4 核心内容的理解与教学思考

数学的育人价值蕴含于内容之中，解析数学内容的本质与挖掘内容的育人价值是相辅相成的. 理解内容的本质、把握其育人价值是创设合适的教学情境、提出有数学含金量的问题的前提，只有这样才能引导学生聚焦内容的本质展开学习，启发和引导学生的数学思考和探索活动，才能真正发挥数学内容的育人功能，将学生数学学科核心素养的发展落实在具体内容的教学中.

本单元内容较多，包含实数指数幂及其运算性质、对数及其运算性质、指数函数和对数函数，以及二分法与求方程的近似解、函数与数学模型等. 下面从内容本质的分析入手讨论这些内容的育人价值以及教学中需要注意的问题.

4.1 指数与对数及其育人价值

1. 实数指数幂及其运算性质

课程标准在本单元的“教学提示”中指出：“指数函数的教学，应关注指数函数的运算法则和变化规律，引导学生经历从整数指数幂到有理数指数幂、再到实数指数幂的拓展过程，掌握指数函数的运算法则和变化规律.”通常，我们习惯于把指数幂的推广看成是代数中数及其运算的问题，而这个“提示”实际上是把指数幂的拓展过程作为指数函数研究的一部分，把指数幂的运算法则看成是指数函数的性质，这是需要关注的.

从数及其运算的角度看，指数幂的最初涵义是“自然数自相乘的缩写”，a^n 就是 n 个 a 相乘的缩写，所以

$$a^1=a, a^{n+1}=a^n \cdot a.$$

由这一定义出发，利用数学归纳法可以证明如下的指数律成立：

$$a^m \cdot a^n=a^{m+n}, (a^m)^n=a^{mn},$$

$$(a \cdot b)^n=a^n \cdot b^n, \quad (*)$$

其中 a,b,m,n 都是自然数. 另一个显然的事实是

$$a^n>1.$$

随着数从自然数集扩充到整数集，再扩充到有理数集、实数集，指数幂 a^n 的底数也逐步扩充到实数，其意义是“实数 a 的自相乘”. 这时，指数律(*)仍然成立，而且有

$$a^n>1(a>1, n \text{ 是正整数}).$$

接着的任务是把指数从自然数推广到有理数再推广到实数. 在把指数 x 从自然数扩充到有理数时，扩充的原则仍然是“使幂的算术运算性质(指数律)仍然成立”.

初中已经把指数范围从自然数推广到全体整数，其路径是根据除法是乘法的逆运算，利用 $a^m \cdot a^n=a^{m+n}$，得出 $a^m \div a^n=a^{m-n}(m>n)$；再由 $m=n$ 得出 $a^0=1$，进而得出 $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$. 现在的任务是先把指数从整数扩展到分数，进而完成从整数指数幂到有理数指数幂的推广.

根据引进分数的经验，首先是定义单位分数指数幂，即 $a^{\frac{1}{n}}$ 的意义. 联系到平方根、立方根的性质，即 $(\sqrt{a})^2=a$，$(\sqrt[3]{a})^3=a$，我们首先把根式的概念推广，即先定义 n 次根式，把使 $x^n=a$ 成立的 x 叫做 a 的 n 次方根，其中 $n>1$ 且 $n \in \mathbf{N}^*$. 当 n 是奇数时，正数的 n 次方根是正数，负数的 n 次方根是负数，用符号 $\sqrt[n]{a}$ 表示；当 n 是偶数时，正数的 n 次方根是两个互为相反数的数，写成 $\pm\sqrt[n]{a}$ $(a>0)$，负数没有偶次方根；0 的任何次方根都是 0，记作 $\sqrt[n]{0}=0$. 上述得到根式 $\sqrt[n]{a}$ 意义的过程具有完备性，对培养学生的理性思维很有用，特别是在归纳地定义 $\sqrt[n]{a}$ 的过程中，可以有效地培养思维的逻辑性.

根据 n 次方根的意义，可得 $(\sqrt[n]{a})^n=a$. 一脉相承地，我们希望整数指数幂的运算性质对分数指数幂也适用. 由 $(\sqrt[n]{a})^n=a^1=a^{\frac{1}{n}\cdot n}$ 可见，规定 $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$ 是合理的，进而规定 $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ $(a>0, m,n \in \mathbf{N}^*, n>1)$ 也是自然的. 于是，在条件 $a>0, m,n \in \mathbf{N}^*, n>1$ 下，根式都可以写成分数指数幂的形式；与负整数指数幂的意义相仿，可

规定$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}(a>0,m,n\in\mathbf{N}^*,n>1)$；与0的整数指数幂的意义相仿，可规定0的正分数指数幂等于0，0的负分数指数幂没有意义. 这样，指数幂a^x中指数x的取值范围就从整数拓展到了分数.

在上述定义下，容易证明：

(1)当$a>0,b>0$时，对于任意有理数r,s，均有：$a^ra^s=a^{r+s}$，$(a^r)^s=a^{rs}$，$(ab)^r=a^rb^r$；

(2)当$a>1,r>0$时，$a^r>1$.

接下来的任务是认识无理数指数幂的意义，需要解决的问题仍然是：当x是无理数时，a^x的意义是什么，它是否为一个确定的数？如果是，它有什么运算性质？解决的方法是，借鉴初中学习中用有理数逼近无理数的经验，通过有理数指数幂认识无理指数幂. 因为中学阶段无法彻底解决这个问题，教科书采取举例的办法，引导学生利用计算工具计算$5^{\sqrt{2}}$，$2^{\sqrt{3}}$的不足近似值和过剩近似值，感受无理数指数幂$a^\alpha(a>0,\alpha$为无理数)是一个确定的实数，并指出整数指数幂的运算性质也适用于实数指数幂.

从上述分析可见，指数幂的研究任务是要明确指数幂的意义及其运算的性质. 实际上，指数幂a^x，除x为正整数外，它的意义不直观. 与对有理数、无理数的研究重点有所不同，对指数幂a^x，我们不太关心$2^{\sqrt{2}}$到底是多少，重点是明确它的意义，研究它有什么“与众不同”的性质. 得到的结论是：

(1)对于任意一个$x\in\mathbf{R}$，$a^x(a>0)$的值是唯一确定的；

(2)a^x最重要的性质是$a^xa^y=a^{x+y}(a>0,x,y\in\mathbf{R})$，由此可得$(a^r)^s=a^{rs}(a>0,r,s\in\mathbf{R})$，$(ab)^r=a^rb^r(a>0,b>0,r\in\mathbf{R})$也成立；

(3)当$a>1,r>0$时，$a^r>1$.

其中，(3)叫做幂的基本不等式，由此出发可以推得如下结论：

①当$a>1,r<0$时，$0<a^r<1$；

②当$0<a<1,r>0$时，$0<a^r<1$；

③当$0<a<1,r<0$时，$a^r>1$.

这些结论的完整证明需要用到极限理论，但我们可以借助信息技术，通过具体例子让学生建立直观感受.

根据上述结论可知，$y=a^x(a>0,x\in\mathbf{R})$就是一个函数. 正因为如此，课程标准强调在$a^x$的指数$x$的拓展过程中掌握指数函数的运算法则和变化规律.

从更一般的角度看，上述扩展过程充满着理性精神，数学概念的延伸与拓展中体现出数学思维的严谨性、数学思想方法的前后一致性和数学知识发生发展过程的逻辑连贯性，可以使学生体会到数学对象的内涵、结构、内容和方法的建构方式，从而使学生体悟到“数学的方式”，领会数学地认识问题、解决问题的思想方法，这对学生理解数学概念的发生发展过程，发展“四基”、“四能”进而提升数学素养等都具有非常积极的意义.

2. 对数及其运算性质

对数的发明与指数无关，而是源于数学家对简化大数运算的有效工具的追求，其关键是利用对应关系$q^k\to k$：

$$[q^0,q^1,q^2,\cdots,q^n,\cdots]\to[0,1,2,\cdots,n,\cdots]$$

建立起如下对应法则：

(1)$q^m\cdot q^n\to m+n$；(2)$q^m\div q^n\to m-n$；

(3)$(q^m)^n\to m\cdot n$；(4)$\sqrt[n]{q^m}\to m\div n$.

利用上述对应法则降低运算层级，达到简化运算的目的.

那么，在研究“指数幂a^x的意义及其运算性质”的基础上研究“对数的意义及其运算性质”，其育人价值如何体现呢？

我们认为，先借鉴已有经验，抽象出“对数”这一研究对象；再从“研究一个代数对象”的“基本套路”出发，发现和提出对数的研究内容，构建研究路径，得出结论，并用于解决问题. 只要让学生完整经历“现实背景——概念(定义、表示)——性质——运算性质——应用”过程，鼓励学生采用独立思考、自主探究、合作交流等方式展开学习，就能充分发挥对数的育人功能. 具体而言是：

(1)通过数学内外的问题(例如$2^x=1$，则$x=0$；$2^x=2$，则$x=1$；$2^x=4$，则$x=2$；一般地，$2^x=N(N>0)$，则$x=?$)，抽象出数学问题：

在$a^x=N(a>0$，且$a\neq1)$中，已知a,N，则$x=?$(以下默认$a>0$，且$a\neq1$.)

这是一个从具体到抽象的过程，对培养发现和提出问题的能力、发展数学抽象素养都有作用.

(2)定义数学对象：就像为了解决"在 $x^n=a$ 中，已知 $n,a,x=?$"而引入符号$\sqrt[n]{a}$一样，通过引入符号 $\log_a N$ 表示 $a^x=N(a>0$，且 $a\neq1)$ 中的 x，并把它叫做以 a 为底 N 的对数，相应的把 a 叫做对数的底数，N 叫做真数，从而得到一个数学研究对象.

如何理解对数这个概念？有人认为，"对数是对求幂的逆运算"，"对数是指数的逆运算"．这些说法都不太准确．事实上，从运算角度看，对于乘方运算 x^y，设其结果是 z，即 $x^y=z$．如果问题是"已知 y,z，求 x"，则 $x=\sqrt[y]{z}$；如果问题是"已知 x，z，求 y"，则 $y=\log_x z$．所以，乘方运算的逆运算有两种，一种是开方运算，另一种是对数运算．另外，在实数范围内，就像方程 $10^x=100$ 存在唯一实数解 $x=2$ 一样，$10^x=3$ 也存在唯一实数解，我们把它记作 lg3，而且可以证明 lg3 是无理数．从这个意义上讲，$\log_a N$ 是一个确定的数，没有什么运算的含义，就是表示数的一种方式，与用 -1 表示 1 的相反意义的量是类似的．可以想象，"对数"这个词与前述的对应关系 $a^x\to x$ 有一定关系，即 $\log_a N$ 是与 $a^x=N$ 中的 x 相对应的那个数，简称为"对数"．这样就给出了理解对数概念的三个角度："乘方运算的逆运算"、"数的表示"和"对应".

从上所述可见，引入对数概念的过程反映了人类理性思维的力量.

(3)研究 $\log_a N$ 的性质．从对数的定义出发，与 $a^x=N$ 相联系：由定义可得$a^{\log_a N}=N$；又由 $a^0=1$ 和 $a^1=a$ 可知，$\log_a 1=0$，$\log_a a=1$ 对任意正数 a 都成立．这些是从对数的定义推出的最基本性质，是从 $\log_a N$ 涉及的要素 a，N 的特殊关系 $(N=a)$、特殊取值 $(N=1)$ 入手而发现的.

(4)研究对数的运算性质．"引入一类新的数，就要研究它的运算性质"，这是代数的基本任务．这里要联系指数幂的运算性质，而且只要把它们"反过来"，用对数符号表示就可以了：

$\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$；

$\log_a\dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$；

$\log_a M^n=n\log_a M\ (n\in\mathbf{R})$.

上述性质表明，利用对数可以把乘法、除法和乘方(含开方)运算分别转化为加法、减法和乘法，从而实现"简化运算".

(5)研究不同底的对数之间的关系，得出换底公式．由定义，任意不等于 1 的正数都可作为对数的底数．如果要针对每一个底数分别计算相应的对数，那么"简化运算"就是一句空话．于是自然提出，能否把其他数为底的对数都转化为某个数为底的对数？数学史上，数学家就是这样干的：由于数系是十进制，因此以 10 为底的对数(常用对数)在数值计算上具有优越性，于是他们制作了常用对数表，利用换底公式$\log_a N=\dfrac{\lg N}{\lg a}$就可以求出以实数 a 为底的对数了．显然，这个过程对学生领会转化与化归思想、培养发现和提出问题的能力很有好处.

至于应用，信息技术的迅速发展使对数计算尺、对数表等体现对数应用的计算工具都不再重要，但利用对数函数建立数学模型解决实际问题则具有永久的生命力.

顺便指出，对数的教学要注重数学的整体性．近年来，因为 HPM 的兴起，而对数的发展史充满着神奇，体现了理性思维的力量，而且对数的发明先于指数，这就吸引着许多老师致力于"对数教学的创新"，在"还原历史"上进行了大量探索．但从与本单元内容的整体关系上看，这种历史还原意义不大.

在"指数幂 a^x 的意义及运算性质"的基础上学习"对数的概念及运算性质"，可以走一条"捷径"．从"经过多少年游客人次翻番"、"已知生物体的碳 14 含量推测其死亡年数"是非常自然的问题，由此就能自然得出"对数"这一研究对象．再从"研究一个代数对象"的"基本套路"出发，发现和提出对数的研究内容，构建研究路径，得出结论并用于解决问题，也是顺理成章的．重要的是要让学生完整经历"现实背景——定义(包括符号表示)——性质——运算性质"过程，鼓励学生采用独立思考、自主探究、合作交流等方式展开学习，不必另起炉灶，"重走发明对数之路"．教学中要加强定义对数概念的完整过程(定义——符号表示——读法——特例(常用对数、自然对数)——与相关概念的联系，即对数与指数的关系)，从如何发现"对数的性质"和"对数的运算性质"，如何利用指数幂的运算性质、通过代数推理得出对数

运算性质从而培养学生的逻辑推理和数学运算素养，如何引导学生发现和提出换底公式等方面加强思考和教学设计创新.

4.2　指数函数刻画了哪类运动变化现象

我们知道，基本初等函数都有明确的现实背景，每一类函数都对应着现实世界中一类运动变化现象，是对这类现象变化规律的数学表达．掌握基本初等函数的概念与性质、理解这些函数中所蕴含的运算规律，其目的就是要运用这些函数建立相应的数学模型解决各种各样的实际问题.

分析课程标准对“函数与数学模型”提出的3条“内容和要求”，可以发现，目标(1)需要在应用函数建立模型的过程中来实现，目标(3)要通过一定量的数学阅读来实现．而在面对实际问题时，能否选择合适的函数类型对其变化规律加以刻画，基础是对各类函数的特征有准确把握，对每类函数到底刻画了哪类现实问题的变化规律有深入了解；同时，对各类函数的增长差异要做到心中有数．由此可见，发展学生的数学建模素养，一是准确理解各类基本初等函数的概念、性质以及不同类型函数刻画了哪一类现实问题的变化规律，准确把握各类函数的增长差异，二是加强用函数建立数学模型解决实际问题的实践．前一个是数学知识基础，后一个是数学建模实践，两者缺一不可.

下面我们讨论一下指数函数刻画的运动变化规律.

现实中，呈指数变化的事例很多．例如：

一个细胞每次进行一分为二的分裂，其结果顺次是$2^0,2^1,2^2,2^3,\cdots$，第n次分裂后的细胞个数$y=2^n$. 从运算的角度看，这个过程就是2的自乘．如果开始时有y_0个细胞，那么第n次分裂后的细胞个数是$y=y_0\cdot 2^n$.

国务院发展研究中心在2000年曾发表《未来20年我国发展前景分析》，这个分析预测2001～2020年，我国GDP年平均增长率可望达到7.3%. 如果把我国2000年GDP记为y_0，那么，2001～2020各年年底我国GDP的可望值可以表示为$y=y_0(1+7.3\%)^x=y_0\cdot 1.073^x(x\in \mathbf{N}^*, x\leqslant 20)$.

类似以上事例的函数表达式，可以一般化地表示为$y=y_0\cdot a^x$. 因为自变量x往往与次数或时间有关，所以这种表达是有序的．如果以连续的时间变化为序，从一般意义上考察表达式$f(t)=a^t(a>0$，且$a\neq 1)$，可以发现，对于任意给定的时间间隔Δt，$\frac{f(t+\Delta t)}{f(t)}=\frac{a^{t+\Delta t}}{a^t}=a^{\Delta t}$，由此可知这一类运动变化现象有如下规律：对于相同的时间改变量Δt，其函数值按确定的比例$a^{\Delta t}$在增长$(a>1)$或衰减$(0<a<1)$. 这就是指数函数所刻画的变化规律.

特别地，当$a>1$时，设$a=1+\alpha$，则指数函数可表示为$y=(1+\alpha)^x(\alpha>0)$；当$0<a<1$时，设$a=1-\alpha$，则指数函数可表示为$y=(1-\alpha)^x(\alpha>0)$. 这样的表达是更具实际意义的，它们表明了指数函数$y=a^x$所刻画的事物变化规律是：按确定的增长率$\alpha=a-1(a>1)$呈指数增长，或按确定的衰减率$\alpha=1-a(0<a<1)$呈指数衰减.

总之，指数函数刻画的现实事物变化规律的关键词是“增长率为常数”，发现规律的方法是作除法运算．理解指数函数，不仅要知道它的解析式、图象和性质，而且要知道它蕴含了一种怎样的运算规律以及如何发现这种规律，只有这样才能使学生懂得哪些实际问题可以通过建立指数函数模型进行解决，这是教学中需要特别注意和加强的地方.

顺便说明，指数函数所刻画事物变化规律的精确描述，需要利用微积分知识才能解决：某种物质的量u是时间t的函数$u=f(t)$，并且量u在每一时刻的变化率与此刻的量u的数值成比例，即

$$u'=ku.$$

解这个微分方程，可得

$$u=c\,\mathrm{e}^{kt}.$$

如果知道$t=0$的量u_0，那么常数$c=u_0$，所以

$$u=u_0\mathrm{e}^{kt}.$$

因此，指数函数刻画的事物变化规律是：

事物的量在每一时刻的变化率与此刻的量的数值成比例.

由于同底数的对数函数和指数函数互为反函数，研究清楚指数函数的变化规律，那么对数函数的变化规律也就自然就清楚了.

4.3　如何抽象指数函数、对数函数概念

将a^x的指数x的范围拓展到$\mathbf{R}$，定义了对数

的概念及其符号表示 $\log_a N$，并研究了指数幂的运算性质、对数的运算性质，我们就可以定义连续的指数函数、对数函数了.

一般而言，定义一类函数，应该明确如下四个要点：

(1)这类函数的现实背景是什么？它刻画了哪类运动变化现象？

(2)决定这类运动变化现象的要素是什么？

(3)要素之间的相互关系如何？

(4)可以用怎样的数学模型来刻画？

其中，(1)是搞清楚这类运动变化现象的基本特征，这是明确研究对象的过程；(2)、(3)是对这类运动变化现象的深入分析，从中析出常量、变量及其依赖关系，这里的“依赖关系”常常要借助于运算而建立对应关系；(4)是以“依赖关系”为导向，利用代数、几何中可以表示这些关系的数学式子、表格、图形等(中学阶段主要是多项式、指数式与对数式、三角式等)加以明确.

1. 指数函数概念的抽象

根据以上要求，为了使学生明确指数函数反映了现实世界中哪类事物的变化规律，我们应该精心创设问题情境，让学生通过对具体实例中包含的各种量(常量、变量)及其关系的分析，发现并归纳它们的共性，在此基础上概括出指数函数定义并给出符号表示．为了使学生能顺利地展开抽象活动，我们可以通过设计不同类型的变化现象，为指数函数提供可类比的对象，使学生获得抽象指数函数概念的路径与方法的启发，在比较不同类型函数变化差异的过程中得出指数函数的定义.

基于这样的思考，我们在教科书中创设了如下问题情境：

问题 1：随着中国经济高速增长，人民生活水平不断提高，旅游成了越来越多家庭的重要生活方式. 由于旅游人数不断增加，A，B 两地景区自 2001 年起采取了不同的应对措施，A 地提高了景区门票价格，而 B 地则取消了景区门票. 表 1 是 A，B 两地景区 2001 年至 2015 年的游客人次的逐年增加量. 比较两地景区游客人次的变化情况，你发现了怎样的变化规律？

表 1

时间/年	A 地景区		B 地景区	
	总人次/万次	年增加量/万次	总人次/万次	年增加量/万次
2001	6 00		278	
2002	6 09	9	309	31
2003	6 20	11	344	35
2004	6 31	11	383	39
2005	6 41	10	427	44
2006	6 50	9	475	48
2007	6 61	11	528	53
2008	6 71	10	588	60
2009	6 81	10	655	67
2010	6 91	10	729	74
2011	7 02	11	811	82
2012	7 11	9	903	92
2013	7 21	10	1 005	102
2014	7 32	11	1 118	113
2015	7 43	11	1 244	126

如何发现数据中蕴含的变化规律呢？可以先通过画散点图(图 1)感受一下：

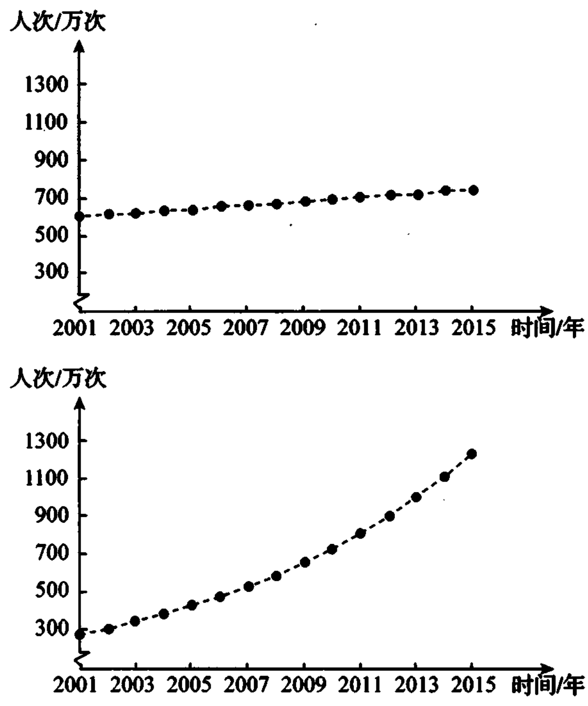

图 1

结合图、表可以发现，A 地游客人次近似于直线上升，年增加量基本稳定在 10 万人次；B 地游客人次变化规律看不出来．怎么办？我们知道，

代数运算是发现数据中蕴含规律性的基本方法，年增加量的计算用减法，而用除法则可得游客人次的“年增长率”：

$$\frac{2002\text{年游客人次}}{2001\text{年游客人次}}=\frac{309}{278}\approx 1.11,$$

$$\frac{2003\text{年游客人次}}{2002\text{年游客人次}}=\frac{344}{309}\approx 1.11,\cdots,$$

$$\frac{2015\text{年游客人次}}{2014\text{年游客人次}}=\frac{1244}{1118}\approx 1.11.$$

于是，B 地游客人次的年增长率约为 $1.11-1=0.11$，是一个常数. 增长(或衰减)率是一个常数，它是决定这种变化规律的要素，称为指数增长(衰减). 如果设经过 x 年后的游客人次为 2001 年的 y 倍，那么

$$y=1.11^{x}(x\in[0,+\infty)).\qquad①$$

这是一个函数，其中指数 x 是自变量.

以上过程，通过作减法得到了游客人次的年增加量，通过作除法得到了游客人次的年增长率，而增加量、增长率恰是刻画事物变化规律的两个很重要的量.

接着，教科书给出问题 2：

当生物死亡后，它机体内原有的碳 14 含量会按确定的衰减比率(简称为衰减率)衰减，大约每经过 5 730 年衰减为原来的一半，这个时间称为“半衰期”. 按照上述变化规律，生物体内碳 14 含量与死亡年数之间有怎样的关系？

设生物死亡年数为 x，死亡生物体内碳 14 含量为 y，那么 y 与 x 之间的关系为 $y=(1-p)^{x}$，即

$$y=\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5730}}\right)^{x}(x\in[0,+\infty)).\qquad②$$

在这个函数中，指数 x 也是自变量. 死亡生物体内碳 14 含量每年都以 $1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5730}}$ 的衰减率衰减. 像这样衰减率为常数的变化方式，我们称为指数衰减. 因此，死亡生物体内碳 14 含量呈指数衰减.

归纳①②的共性，并考虑到指数 $x\in\mathbf{R}$ 时 a^{x} $(a>0,a\neq 1)$ 有意义，我们就可以在一般意义上给出刻画这类现象变化规律的函数定义：

函数 $y=a^{x}(a>0$，且 $a\neq 1)$ 叫做指数函数，其中指数 x 是自变量，定义域是 $\mathbf{R}$.

2. 对数函数概念的抽象

因为学生在对数概念的学习中已经掌握了对数与指数之间的内在关联，所以对数函数概念的抽象应该在此基础上展开，这是对数函数概念抽象过程的“与众不同”之处.

指数函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5730}}(x\geqslant 0)$ 给出了死亡生物体内碳 14 的含量 y 随死亡时间 x 的变化而衰减的规律，一个自然的问题是：已知死亡生物体内碳 14 的含量，如何判断它的死亡时间呢？进一步地，死亡时间 x 是碳 14 含量 y 的函数吗？根据指数与对数的关系可得 $x=\log_{\sqrt[5730]{\frac{1}{2}}}y(0<y\leqslant 1)$，根据指数函数的性质可知，对于任意一个 $y\in(0,1]$，通过对应关系 $x=\log_{\sqrt[5730]{\frac{1}{2}}}y$，在 $[0,+\infty)$ 上都有唯一确定的数 x 和它对应，所以 x 也是 y 的函数. 也就是说，函数 $x=\log_{\sqrt[5730]{\frac{1}{2}}}y$，$y\in(0,1]$ 刻画了时间 x 随碳 14 含量 y 的衰减而变化的规律.

一般地，根据指数与对数的关系，由 $y=a^{x}$ $(a>0$，且 $a\neq 1)$ 可以得到 $x=\log_{a}y(a>0$，且 $a\neq 1)$. 根据习惯，将解析式写成 $y=\log_{a}x(a>0$，且 $a\neq 1)$，$x\in(0,+\infty)$，这样就得到了对数函数的定义.

值得指出的是，从抽象研究对象的过程与方法看，指数函数与对数函数概念的抽象具有典型性，教师应该在教学过程中引导学生进行仔细揣摩. 在发现现实世界中呈指数增长(衰减)这类现象的变化规律的过程中，我们综合使用了表格、图象(散点图)、运算等数学方法，特别是通过运算得出精确表达的函数解析式. 我们知道，函数的研究对象是现实世界中的确定性现象. 如果某类确定性现象的变化规律可以用一个代数式来表达，那么得出这个表达式的数学方法就是加、减、乘、除、乘方、开方这样的初等数学运算. 像“均匀变化”、“均匀加速”之类的现象，因为其规律是“增量保持不变”，所以利用减法运算；而指数爆炸、对数增长之类的现象，其规律是“增长率保持不变”，所以利用除法运算. 另外，在发现规律的过程中，从特殊到一般、从定性(图象直观)到定量(用解析式表达数量关系)等也是基本的数学思想和方法.

顺便指出，对数函数教学中要加强从反函数角度发现和提出问题的引导. 在数学中，“研究反

过来的问题"是天经地义的，从命题与逆命题的角度入手是发现和提出问题的基本路径，体现了建立数学知识的内在联系性，借助指数函数的已有结果认识对数函数的过程，同时也能加深指数函数的认识．能够习惯性地问"反过来会怎样?"就是学会数学地发现和提出问题的表现之一．

从更一般的角度看，函数是两个数集元素之间的对应关系，本质上反映了自变量与函数值之间的代数关联，而数学运算是发现和建立这种关联的基本手段，对于基本初等函数则尤其如此．实际上，对应于指数幂的运算法则，我们可以形式化地给出如下指数函数和对数函数的定义：

指数函数是定义在实数集上，且满足 $f(x)\cdot f(y)=f(x+y)$ 的非常值连续函数；

对数函数是定义在正实数集上，且满足 $f(xy)=f(x)+f(y)$ 的非常值连续函数．

通过运算法则形式化地定义函数，这是理性思维的结果，更能说明函数的本质特征．例如，常常看到老师们争论 $y=a^{3x}$ 是不是指数函数，如果从上述定义出发，因为 $a^{3(x+y)}=a^{3x+3y}=a^{3x}\cdot a^{3y}$，满足定义，所以它是指数函数．这表明，采用上述定义就不会出现任何歧义．不过，形式化定义虽然纯粹但脱离了一切现实背景，与学生的认知基础距离很远，学生很难真正理解其意义，不符合高中学生的认知水平，所以教材采用了从学生熟悉的现实背景出发，引导学生利用数学运算发现规律，让学生感悟数学运算在研究指数函数和对数函数中的作用，并将这种做法贯穿始终．

4.4　如何用函数图象和代数运算的方法研究指数函数、对数函数的性质

从代数运算的视角看函数 $y=x^n$，$y=a^x$ 和 $y=\log_a x$，它们就是 $a^b=c$（其中 $a>0,a\neq 1$）中的三个数一个为常数、一个为自变量、一个为函数所得的三种结果．所以，用代数运算的方法研究这三个基本初等函数是由它们的代数背景所决定的．另外，指数函数与对数函数互为反函数，这种特殊关系也是在研究中可以利用的．顺便指出，数学中最基本的运算与现实中最常见的现象相对应，最基本的函数——线性函数、二次函数、幂函数、指数函数、对数函数和三角函数，与现实中最常见的运动变化现象相对应，这是学习数及其运算、基本初等函数的现实理由，当然也是进一步学习数学的必需．

下面我们列举通过代数运算得出指数函数、对数函数的性质，从代数关系获得函数图象之间关系的某些结论：

(1)由指数幂、对数的定义就可得出指数函数、对数函数的定义域、值域．

(2)由 $a^0=1$ 可知所有指数函数都过点(0，1)，由 $\log_a 1=0$ 可知所有对数函数都过(1,0)．

(3)由指数幂的运算性质、幂的基本不等式，可以证明：$0<a<1$ 时，$x<0$ 时 $a^x>1$；$x>0$ 时 $0<a^x<1$．$a>1$ 时，$x<0$ 时 $0<a^x<1$，$x>0$ 时 $a^x>1$．由此可推出，$0<a<1$ 时 $y=a^x$ 为减函数，$a>1$时，$y=a^x$ 为增函数：

$\forall x_1,x_2\in\mathbf{R}$，$x_1<x_2$，则$x_1-x_2<0$．当 $0<a<1$ 时，$a^{x_1-x_2}>1$，即$a^{x_1}>a^{x_2}$；当 $a>1$ 时，$0<a^{x_1-x_2}<1$，即$a^{x_1}<a^{x_2}$．

根据指数函数与对数函数互为反函数，由指数函数的性质可以得出对数函数的性质．

(4)利用代数运算简捷地画函数图象．由$a^{-x}=\left(\frac{1}{a}\right)^x$，可知函数 $y=a^x$ 的图象与函数 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ 的图象关于 y 轴对称，在画出 $y=a^x$ 的图象后，可以利用对称性画出 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ 的图象．类似的，可以利用 $y=\log_a x$ 的图象作函数 $y=\log_{\frac{1}{a}} x$ 的图象．

由 $y=\log_a x$ 可得 $x=a^y$．设(s,t)是 $y=\log_a x$ 图象上的任意一点，则 $s=a^t$，这说明(s,t)关于直线 $y=x$ 的对称点(t,s)在函数 $y=a^x$的图象上；反之也对．所以，可以利用函数 $y=a^x$ 的图象作函数 $y=\log_a x$ 的图象．

以上从函数解析式入手分析函数图象之间关系的方法，可以让学生从具体到抽象进行归纳，教材中也给出了相应的示范．

5　加强背景和应用，发展学生数学建模素养

5.1　把函数应用渗透在学习函数的全过程

函数是描述客观世界中变量关系和规律的最为基本的数学语言和工具，幂函数、指数函数与对数函数是最基本的、应用最广泛的函数，在学习这些函数的过程中，加强背景与应用，既是为了使学

生了解这些函数的来源,有效地经历概念的抽象过程,更深刻地理解这些函数的本质,也是为了使学生明确这些函数分别描述了现实世界中哪一类变量关系和规律,从而为学生在面对具体问题时能正确选择函数类型、建立适当的数学模型解决实际问题打下坚实基础. 同时,这也是为了把数学建模素养的培养落实在本单元学习全过程的需要.

教材编写中,首先是对指数函数、对数函数的现实背景与应用给予了充分关注. 教科书在章引言中指出,在自然条件下,细胞的分裂、人口的增长、放射性物质的衰减等问题,都可以用指数函数构建数学模型来描述它们的变化规律;在指数函数概念的建立过程中,教科书以现实中的真实事例为背景,通过与"线性增长"的比较得出"指数增长"的规律进而引入指数函数的定义与表示;在研究指数函数、对数函数的图象与性质之后,教科书加强了运用函数图象与性质解决实际问题的内容;最后,教科书通过具体实例对不同函数的增长差异(直线上升、指数爆炸、对数增长)进行比较,并专门安排了"函数的应用"一节,在介绍了运用函数性质求方程近似解的基本方法(二分法)的基础上,安排了典型而丰富的实例,引导学生更深入地理解用函数构建数学模型的基本过程,学习运用模型思想发现和提出问题、分析和解决问题的方法. 本单元安排了40多个实际问题,涉及游客人次旅游收入的指数增长、碳14考古、人口增长模型、产品产量增长率、储蓄利率(复利)、地震释放的能量与震级的关系、GDP增长率、血液中酒精含量或药物含量的指数衰减、物价的增长率、溶液酸碱度、火箭飞行的运动规律、鲑鱼游速与耗氧量的关系、声强级别、动物或植物自然繁殖的规律、投资方案的选择、数据量的爆炸式增长、特定人群身高体重的关系、汽车耗油量、废气减排、物体冷却模型等各种各样的现实问题.

5.2 不同函数增长差异的比较

面对实际问题时,为了准确地描述它的变化规律,需要选择恰当的函数类型来构建数学模型,为此就要先分析清楚不同类型函数的增长差异. 从函数性质的角度看,增长差异的比较可以深化函数单调性的认识,不同函数增长差异刻画了它们的增长方式以及变化速度的差异.

由于学生对线性函数已经有了认知基础,其变化规律非常直观:在整个定义域上的瞬时变化率恒定,即$\frac{\Delta y}{\Delta x}$为定值. 因此,教科书用线性函数作为一把尺子,来"度量"指数函数和对数函数的增长差异,从而帮助学生理解直线上升、指数爆炸和对数增长的含义.

一般而言,对于一个具体的现实问题,可以用于刻画其数量关系、变化规律的函数类型是不唯一的,应根据实际问题的需要进行权衡,并需要借助一定的数学工具对函数的拟合优度进行判断.

基本初等函数都是某一类运动变化现象的数学抽象,是理想化的. 现实事物的运动变化往往不是那么纯粹,其增长方式也是丰富多彩的. 例如,有平稳增长也有震荡增长,增长速度有的先慢后快有的先快后慢等等. 所以,在利用函数建立数学模型解决实际问题时,一般需要根据实际情况做出选择,有时还需要"分段处理",这时就要建立分段函数模型了.

5.3 二分法与求方程近似解的育人价值

用数学解决实际问题时,经常需要解方程,但从现实问题中抽象出的方程往往很难得出精确解. 同时,从实用角度考虑,达到一定精度的解就完全可以有令人满意的效果了. 这样,在无法得出精确解时,设法求出满足精确度要求的解就成为我们的追求.

在"预备知识"中曾经安排"从函数的观点看方程和不等式". 类比"一元二次方程$ax^2+bx+c=0$有实根⇔一元二次函数$y=ax^2+bx+c$有零点⇔一元二次函数$y=ax^2+bx+c$的图象与x轴有公共点",得出"方程$f(x)=0$有实数解⇔函数$y=f(x)$有零点⇔函数$y=f(x)$的图象与x轴有公共点",这个过程没有什么难点.

接下来,要把这种直观描述转化为可操作的代数表示,其难点在于"想不到"用"函数图象在区间$[a,b]$连续不断"、"$f(a)f(b)<0$"实现转化. 实际上,由高中数学内容的抽象性导致的"不是做不到,而是想不到"的现象比较普遍,这体现了"数学的方式"的独特性,包括数学地看问题的视角、抽象事物本质的角度以及表达的方式等等,这些是数学的理性思维的具体表现,恰是数学学科核

心素养的精要所在．所以，教学中一定不要认为“说破了”学生就知道了而采取“告诉式教学”，要通过适当的“情境＋问题”引导学生经历过程，变“想不到”为“想得到”，从而通过基本思想、基本活动经验以及从数学角度发现和提出问题能力的培养，使数学学科核心素养落地．

教材在这里安排了一个“探究”活动：

对于二次函数 $f(x)=x^2-2x-3$，观察它的图象（图 2），发现它在区间[2,4]上有零点．这时，函数图象与 x 轴有什么关系？计算 $f(2)$ 与 $f(4)$ 的乘积，这个乘积有什么特点？在区间[－2,0]上是否也有这种特点呢？

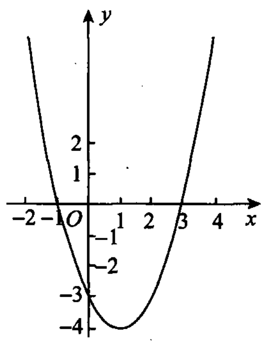

图 2

再任意画几个函数的图象，观察函数零点所在区间，并计算在区间端点的函数值的积，是否有同样的结论？

这个问题的引导性在于，观察“函数图象与 x 轴的关系”的角度，不仅“有公共点(3,0)”，而且是“穿过”x 轴．这样，在“图象连续不断”的条件下，把这两点结合起来，那么在零点所在区间内，零点的两边函数值一定异号．也就是说，“图象穿过 x 轴”（形）用“函数的取值规律”（数）来表达，就是“在 $x=3$ 的两侧函数值异号”，可以取端点为代表，即 $f(2)f(4)<0$．

有了上述铺垫，再让学生自己举几个例子分析一下，归纳出共性而概括出“零点存在定理”就不难了．不过，这里还有一个问题也是属于“数学的方式”、逻辑的严谨性方面的，即从逻辑的角度对定理中两个条件的充分性、必要性的考察，这也是发展数学学科核心素养的契机，老师们可以由此体会一下“将核心素养的发展融于具体内容的学习中”的韵味．

利用“零点存在定理”可以判断一个有限区间内存在零点，接着的任务是求出其近似值．用二分法求方程近似解，其想法直观、朴素但思想深刻，它不仅使求解过程程序化、步骤化，是体验算法思想、培养数学运算素养的好载体，同时也体现了逼近思想，和微积分思想如出一辙．同时，具体求解过程中常常具有构造性，所以也是培养学生创新思维的好素材．

6 小结

本单元内容按“背景——概念——图象和性质——应用”的路径安排学习过程，体现了研究函数的一般套路，有利于学生形成系统性、普适性的数学思维模式．让学生经历从具体的现实情境中抽象一般规律和结构的过程，有利于培养透过现象看本质的能力，使他们学会以简驭繁，养成一般性思考问题的好习惯，从而发展数学抽象、直观想象素养，逐渐学会用数学的眼光观察世界．通过数学运算、函数图象发现指数函数、对数函数所刻画现实世界中的变量关系和规律，研究指数函数和对数函数的性质，比较不同函数的增长差异，有利于学生把握相关数学内容的本质，提升数学运算、逻辑推理素养，使学生逐步学会用数学的思维思考世界．运用指数函数和对数函数建立数学模型解决实际问题，可以帮助学生切实感受数学与现实世界的联系，认识数学在科学、社会、工程技术等领域的作用，积累数学活动经验，发展数学建模素养，提高实践能力和创新意识，进而逐步学会用数学语言表达世界．以上这些就是通过本单元学习要达成的育人目标，也是教学中应重点关注的．

参考文献

[1]人民教育出版社，课程教材研究所，中学数学课程教材研究开发中心．义务教育教科书·数学·七年级·上册[M]．北京：人民教育出版社，2012

[2] 中华人民共和国教育部．普通高中数学课程标准（2017 年版）[M]．北京：人民教育出版社，2018

[3]章建跃．数学抽象：从背景到概念再到结构——兼谈人教 A 版的数学问题创新设计[C]//人民教育出版社，课程教材研究所，北京师范大学数学科学学院．中学数学课程与教材国际论坛论文集．北京：人民教育出版社，2019