【第 17 题】

1、知识与能力要求：扇形面积公式，导数基本运算

2、主要存在问题及错因

第一问：本小题相对而言得分较均衡，错误主要在未能写对弓形区域 S1。

第二问：错误主要集中在这几方面：

（1） 无法列出表达式；

（2） 无法写对定义域

（3）并未列表写单调性

典型错例

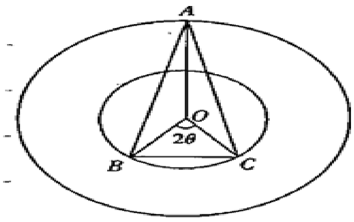
17.解:

(1). $\theta=\frac{\pi}{3} \Rightarrow 2\theta=\frac{2\pi}{3}$.

$S_1 = S_{扇OBC} - S_{\triangle OBC} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$

$\cancel{S_2 = S_{\triangle OAB} + S_{\triangle OAC} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle OBC} = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{4}\sqrt{3}}$.

$\cancel{\therefore S_2 - S_1 = \frac{3}{4}\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}}$



（第 17 题图）

$\cancel{(2)\ S_1 = \theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta}$.　　$S_2 = S_{\triangle OAB} + S_{\triangle OAC}$

$\cancel{S_2 = 2\sin\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta}$　　$= \sqrt{3}$

$\cancel{\therefore S_2 - S_1 = 2\sin\theta - \theta}$.　　$\therefore S_2 - S_1 = \frac{5}{4}\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$.

(2). $S_1 = \theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta$.　$S_2 = 2\sin\theta$.

$S_2 - S_1 = 2\sin\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta - \theta$.　$\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$.

令 $f(\theta) = 2\sin\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta - \theta$，$\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$.

$f'(\theta) = 2\cos\theta + \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 + 2\cos\theta$

令 $f'(\theta) = 0$　$\therefore \cos\theta = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$（舍负）.

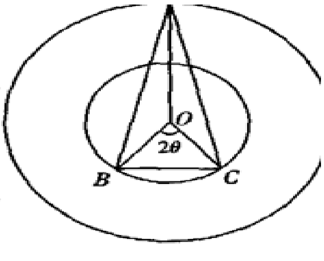
令 $\cos\theta_0 = \cos\theta = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

θ_0	$(0, \theta_0)$	θ_0	$(\theta_0, \frac{\pi}{2})$
$f'(\theta)$	+	0	−
$f(\theta)$	↗	极大值	↘

$\therefore (S_2 - S_1)_{max}$ 时

$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

17.



（第 17 题图）

解：(1) ∵ $\theta=\frac{\pi}{3}$

∴ $2\theta=\frac{2\pi}{3}$，$\angle AOB=\angle AOC=\frac{2\pi}{3}$

∴ $S_{\triangle OBC}=\frac{1}{2}\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$

$S_1=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}$

$S_2=\frac{1}{2}\times1\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times2=\sqrt{3}$

∴ $S_2-S_1=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{5\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{3}$

答：S_2-S_1 的值 $\frac{5\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{3}$

(2) $S_1=\theta-\frac{1}{2}\sin2\theta$

$S_2=2\sin\theta$

$S_2-S_1=2\sin\theta-\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta$

令设 $f(\theta)=2\sin\theta-\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta$，$\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$

$f'(\theta)=2\cos\theta-1+\cos2\theta$

$=2\cos^2\theta+2\cos\theta-2$

令 $f'(\theta)=0$

$\cos\theta=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$（舍负）

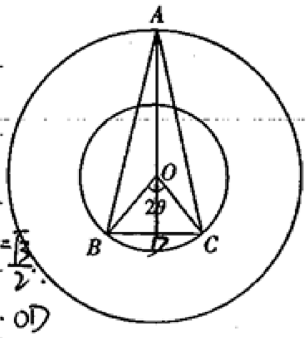
$\cos\theta$	$(0,\frac{\sqrt{5}-1}{2})$	$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$	$(\frac{\sqrt{5}-1}{2},1)$
$f'(\theta)$	+	0	−
$f(\theta)$	↑	极大	↓

当 $\cos\theta=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 时

$f(\theta)$ 取得最大值

即 S_2-S_1 取得最大值

答：当 $\cos\theta=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 时，纪念章最美观.



(第 17 题图)

17.解：(1) ∵$\theta=\frac{\pi}{3}$ ∴$\angle BOC=2\theta=\frac{2\pi}{3}$

∵$OB=1$. 延长AO交BC于点D 由等腰△ABC

∴$OD\perp BC$.

∴$BC=2BD=2\times OB\sin\theta.=1$ $OD=OB\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

∴$S_1=S_{扇BOC}-S_{\triangle BOC}=\frac{\frac{2\pi}{3}}{2\pi}\cdot\pi r^2-\frac{1}{2}BC\cdot OD$

$=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}$

$S_2=S_{\triangle OAB}+S_{\triangle OAC}=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle OBC}=\frac{1}{2}BC\cdot(AO+OD)-\frac{1}{2}BC\cdot OD$

$=\frac{1}{2}BC\cdot AO=1$.

∴$S_2-S_1=1-\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{4+\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{3}$

(2) 由题意 $BC=2\sin\theta$ $OD=\cos\theta$.

$S_1=\frac{2\theta}{2\pi}\cdot\pi-\frac{1}{2}BC\,OD=\theta-\sin\theta\cos\theta$.

$S_2=\frac{1}{2}BC(AO+OD)-\frac{1}{2}BC\cdot OD=\frac{1}{2}BC\cdot AO=2\sin\theta$.

∴$S_2-S_1=2\sin\theta+\sin\theta\cos\theta-\theta$ $\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$

令$f(\theta)=2\sin\theta+\sin\theta\cos\theta-\theta$

∴$f'(\theta)=2\cos\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta-1$.

$=2\cos\theta+2\cos^2\theta-2$. 令$f'(\theta)=0$ ∴$\cos\theta=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

令$\cos\theta_0=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

θ	$(0,\theta_0)$	θ_0	$(\theta_0,\frac{\pi}{2})$
$f'(\theta)$	+	0	−
$f(\theta)$	↗	极值	↘

∴$\cos\theta=\cos\theta_0=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$时

$f(\theta)$取极大值

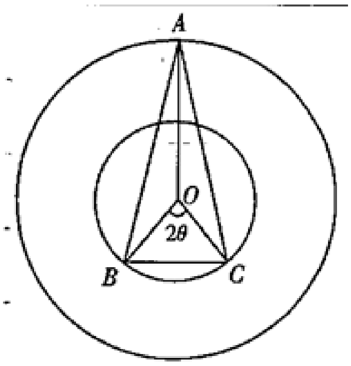
即S_2-S_1的值最大.

17. 解：(1) 由题 $\angle BOC=\frac{2\pi}{3}$

$\therefore S_{扇形BOC}=\frac{\frac{2\pi}{3}}{2\pi}\cdot\pi=\frac{\pi}{3}$

$S_{\triangle OBC}=\frac{1}{2}\cdot OB\cdot OC\cdot\sin\angle BOC=\frac{\sqrt{3}}{4}$

$\therefore S_1=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}$



(第 17 题图)

由题 等腰$\triangle ABC$，$S_{\triangle ABO}=S_{\triangle ACO}$

$\therefore \angle AOB=\frac{2\pi}{3}$

$\therefore S_2=S_{\triangle OAB}+S_{\triangle OAC}=\frac{1}{2}\cdot OB\cdot OA\cdot\sin\angle AOB\cdot 2=\sqrt{3}$

$\therefore S_2-S_1=\frac{5\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{3}$

(2) $S_{扇形BOC}=\frac{2\theta}{2\pi}\cdot\pi=\theta$　　$\because BC$为劣弧

$S_{\triangle OBC}=\frac{1}{2}\cdot OB\cdot OC\cdot\sin\angle BOC=\frac{1}{2}\sin 2\theta$　　$\therefore 0<\theta<\frac{\pi}{2}$

$\therefore S_1=\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta$

$\angle AOB=\frac{1}{2}(2\pi-2\theta)=\pi-\theta$

$\therefore S_2=S_{\triangle AOB}+S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2}\cdot OB\cdot OA\cdot\sin\angle AOB\cdot 2=\cancel{\sin\theta}\ 2\sin\theta$

$\therefore S_2-S_1=2\sin\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta-\theta$　　$(0<\theta<\frac{\pi}{2})$

令 函数 $f(\theta)=2\sin\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta-\theta$

$\therefore f'(\theta)=2\cos\theta+\cos 2\theta-1=2\cos^2\theta+2\cos\theta-2$

$\therefore$ 当 $\cos\theta=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 时，$f'(\theta)=0$　此时 $\theta=\theta_0$

~~即 且~~ $\therefore 0<\cos\theta<\cos\theta_0$，$f(\theta)$ 单调↓

$\cos\theta_0<\cos\theta<1$，$f(\theta)$ 单调↑

即 $\theta\in(0,\theta_0)$ 单调增；$\theta\in(\theta_0,\frac{\pi}{2})$ 单调减

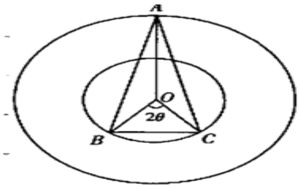
综上：当 $\cos\theta=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 时，S_2-S_1 值最大，设计最美观。

17. (1) 等腰三角形ABC中

$S_{\triangle AOC}=S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}OA\cdot OB\sin\angle BOA$

$=\sin(\pi-\theta)$

$=\sin\theta$ cm^2



(第 17 题图)

$\therefore S_2=2\sin\theta,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}$

$S_1=S_{扇形BOC}-S_{\triangle BOC}$

由垂径定理, $\triangle BOC$中BC上高

$h=OB\cos\frac{\angle BOC}{2}=\cos\theta$ cm

$BC=2OB\sin\frac{\angle BOC}{2}=2\sin\theta$ cm

$S_1=S_{扇形BOC}-S_{\triangle BOC}$

$=2\theta r_1^2-\frac{1}{2}h\cdot BC$

$=2\theta-\sin\theta\cos\theta\ (cm^2),\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}$

$\therefore$当$\theta=\frac{\pi}{3}$时

$S_2-S_1=2\sin\theta-2\theta+\sin\theta\cos\theta$

$=\sqrt{3}-\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}=(\frac{5\sqrt{3}}{4}-\frac{2\pi}{3})\ cm^2$

答S_2-S_1的值为$\frac{5\sqrt{3}}{4}-\frac{2\pi}{3}$

(2) 由(1), $S_2-S_1=2\sin\theta-2\theta+\sin\theta\cos\theta,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}$

$\therefore (S_2-S_1)'=2\cos\theta-2+\cos^2\theta-\sin^2\theta$

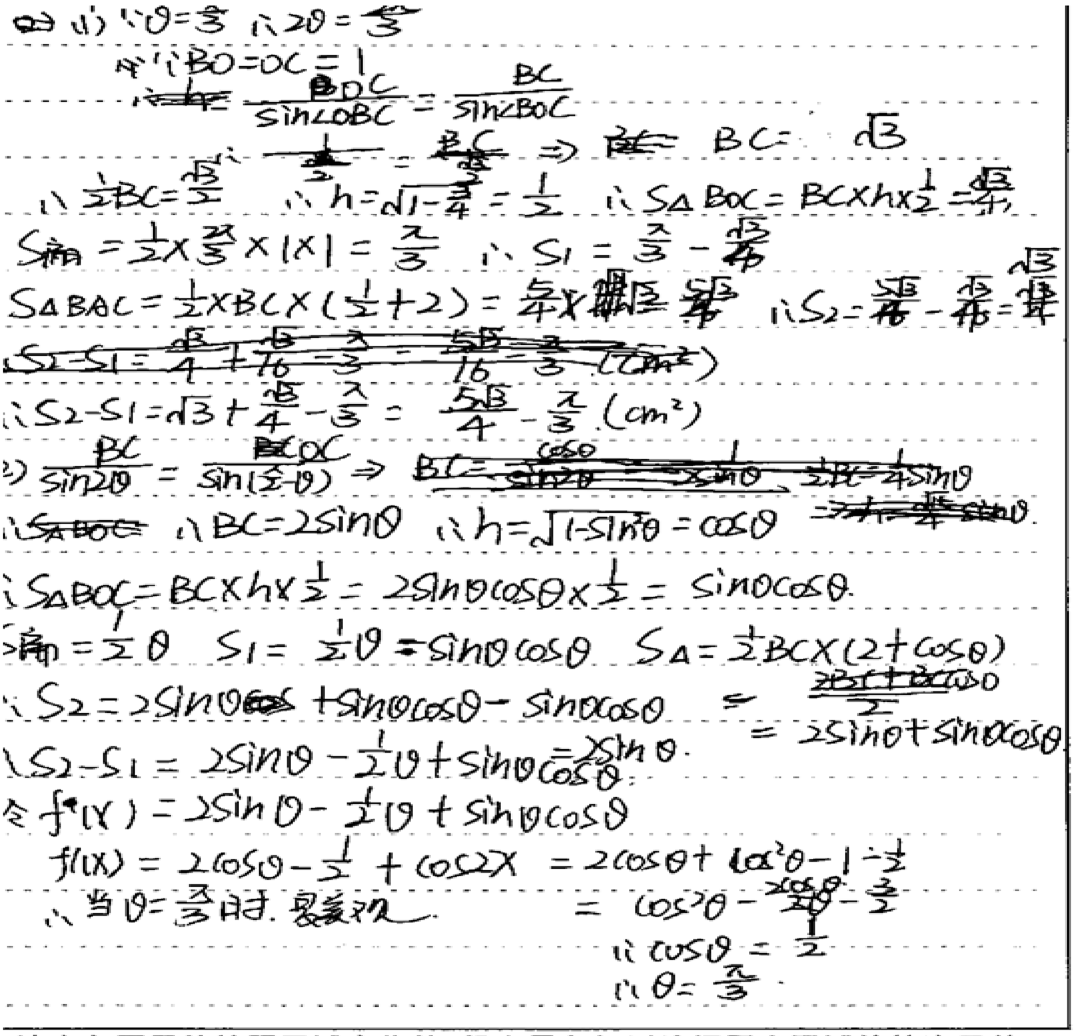
$=2\cos^2\theta+2\cos\theta-3$　　设$\cos\theta_0=\frac{\sqrt{7}-1}{2}$

令$(S_2-S_1)'=0$, 得$\theta=\theta_0$

θ	$(0,\theta_0)$	θ_0	$(\theta_0,\frac{\pi}{2})$
$(S_2-S_1)'$	+	0	−
S_2-S_1	↑	极大	↓

$\therefore$当$\theta=\theta_0$时S_2-S_1有极大值也是最大值

答当纪念章最美观时, $\cos\theta=\frac{\sqrt{7}-1}{2}$


(2) (1) ∵$\theta=\frac{\pi}{3}$ ∴$2\theta=\frac{2\pi}{3}$

又∵$BO=OC=1$

∴$\frac{BOC}{\sin\angle OBC}=\frac{BC}{\sin\angle BOC}$

$\frac{1}{\frac{1}{2}}=\frac{BC}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\Rightarrow BC=\sqrt{3}$

∴$\frac{1}{2}BC=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ∴$h=\sqrt{1-\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}$ ∴$S_{\triangle BOC}=BC\times h\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$

$S_{扇}=\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{3}\times1\times1=\frac{\pi}{3}$ ∴$S_1=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}$

$S_{\triangle BAC}=\frac{1}{2}\times BC\times(\frac{1}{2}+2)=\frac{5\sqrt{3}}{4}$ ∴$S_2=\frac{5\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}$

~~∴$S_2-S_1=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{16}-\frac{\pi}{3}=\frac{5\sqrt{3}}{16}-\frac{\pi}{3}$ (cm^2)~~

∴$S_2-S_1=\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{3}=\frac{5\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{3}$ (cm^2)

(2) $\frac{BC}{\sin2\theta}=\frac{BO}{\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)}\Rightarrow$

∴$BC=2\sin\theta$ ∴$h=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\cos\theta$

∴$S_{\triangle BOC}=BC\times h\times\frac{1}{2}=2\sin\theta\cos\theta\times\frac{1}{2}=\sin\theta\cos\theta$

$S_{扇}=\frac{1}{2}\theta$ $S_1=\frac{1}{2}\theta-\sin\theta\cos\theta$ $S_{\triangle}=\frac{1}{2}BC\times(2+\cos\theta)$

∴$S_2=2\sin\theta+\sin\theta\cos\theta-\sin\theta\cos\theta$ $=\frac{2BC+BC\cos\theta}{2}=2\sin\theta+\sin\theta\cos\theta$

∴$S_2-S_1=2\sin\theta-\frac{1}{2}\theta+\sin\theta\cos\theta=2\sin\theta$.

令$f(x)=2\sin\theta-\frac{1}{2}\theta+\sin\theta\cos\theta$

$f'(x)=2\cos\theta-\frac{1}{2}+\cos2x=2\cos\theta+2\cos^2\theta-1-\frac{1}{2}$

∴当$\theta=\frac{\pi}{3}$时 最大值 $=\cos^2\theta-\frac{2\cos\theta}{2}-\frac{3}{2}$

∴$\cos\theta=\frac{1}{2}$

∴$\theta=\frac{\pi}{3}$

3、教学策略：

本题难度适中，最后扬州市均分大约在 9 分左右，作为比较常见的一道应用题，得分还有上升空间，高考前还是要进一步回归教材，回归课本，夯实基础。具体有：

一、教师在解题示范过程中要强化答题的规范，包括定义域的主动说明。

二、解答题中研究单调性，一定要进一步强调列表，且注意自变量是角，而不是三角函数。

建议在高考前最后一个月，各校应围绕 8 大 C 级考点，滚动练习各主干内容，尤其是各种不能张冠李戴，同时解题的训练应从学生的读题训练开始训练，在课堂进行简单解答题的堂练，提高信度和针对性。