

江苏省仪征中学 2021—2022 学年度第一学期高三数学综合练习 3

考试范围：集合、常用逻辑用语、不等式、函数与导数

班级_____姓名_____学号_____评价_____

一、单项选择题(本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分)

1. 若 A, B 是全集 I 的真子集, 则下列四个命题: ① $A \cap B = A$; ② $A \cup B = A$; ③ $A \cap C_I B = \emptyset$; ④ $A \cap B = I$; ⑤ $x \in B$ 是 $x \in A$ 的必要不充分条件. 其中与 $A \subseteq B$ 等价的有()

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

2. 已知实数 a, b 满足 $\ln a + \ln b = \ln(a + b + 3)$, 则 $a + b$ 的最小值为()

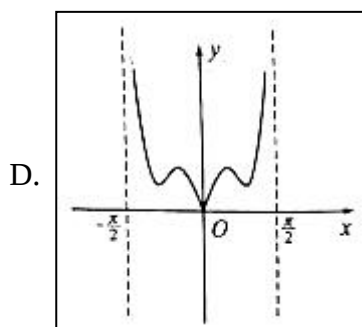
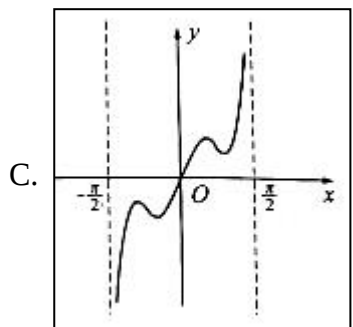
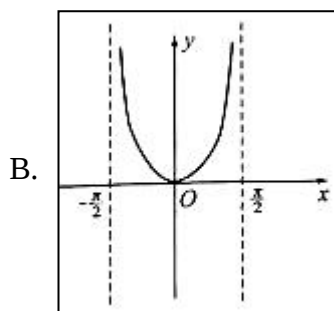
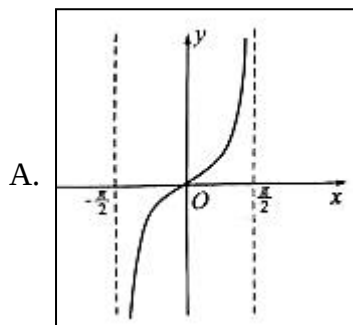
A. $2\sqrt{3}$ B. 4 C. 6 D. $2\sqrt{5}$

3. 若 $0 < x_1 < x_2$, 则下列函数 ① $f(x) = x$; ② $f(x) = x^2$; ③ $f(x) = x^3$; ④ $f(x) = \sqrt{x}$;

⑤ $f(x) = \frac{1}{x}$ 满足条件 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ ($0 < x_1 < x_2$) 的有()

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

4. 函数 $f(x) = \frac{2^{|x|} \cdot x}{\cos x}$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象大致是()



5. 已知 a, b, c 为正实数, 满足 $\left(\frac{1}{2}\right)^a = \log_2 a$, $\left(\frac{1}{2}\right)^b = b^2$, $\frac{1}{c^2} = 2^{-c}$, 则 a, b, c 的大小关系为()

A. $a < c < b$ B. $b < c < a$ C. $c < a < b$ D. $c < b < a$

6. 定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(-x) = -f(x)$, $f(x) = f(x+4)$, 且当 $x \in (-1, 0)$ 时, $f(x) = 2^x + \frac{1}{5}$,

则 $f(\log_2 24) =$ ()

A. $\frac{17}{10}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $-\frac{13}{15}$ D. $-\frac{14}{15}$

7. 已知函数 $f(x)$ 满足 $xf'(x)\ln x + f(x) > 0$ (其中 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导数), 若 $a = f(e^{\frac{1}{2}})$, $b = f(e)$, $c = f(e^2)$, 则下列选项中正确的是 ()

- A. $4c < 2b < a$ B. $2b < 4c < a$ C. $a < 2b < 4c$ D. $a < 4c < 2b$

8. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = f(3x)$, 当 $x \in [1, 3]$, $f(x) = \ln x$, 若在区间 $[1, 9]$ 内, 函数 $g(x) = f(x) - ax$ 有三个不同零点, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(\frac{\ln 3}{3}, \frac{1}{e})$ B. $(\frac{\ln 3}{9}, \frac{1}{3e})$ C. $(\frac{\ln 3}{9}, \frac{1}{2e})$ D. $(\frac{\ln 3}{9}, \frac{\ln 3}{3})$

二、多项选择题(本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

9. 下列函数中, 既是偶函数, 又在 $(0, +\infty)$ 上单调递增的是 ()

- A. $y = x^3$ B. $y = x^{x-2}$ C. $y = ex^{|x|}$ D. $y = \lg x^2$

10. 下列说法正确的是 ()

- A. “ $\square > 1$ ” 是 “ $a^2 > 1$ ” 的充分不必要条件
 B. “ $\frac{4}{3} < \square < 2$ ” 是 “ $(a-1)^{-2} < (2a-3)^{-2}$ ” 的充要条件
 C. 命题 “ $\forall x \in R, x^2 + 1 < 0$ ” 的否定是 “ $\exists x \in R$, 使得 $x^2 + 1 \geq 0$ ”
 D. 已知函数 $y = f(x)$ 的定义域为 R , 则 “ $f(0) = 0$ ” 是 “函数 $y = f(x)$ 为奇函数” 的必要不充分条件

11. 下列说法正确的是 ()

- A. 若函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 2]$, 则函数 $f(2x)$ 的定义域为 $[0, 1]$
 B. $y = \frac{x+1}{x+2}$ 的图象关于 $(-2, 1)$ 成中心对称
 C. $y = (\frac{1}{2})^{-x^2+1}$ 的最大值为 $\frac{1}{2}$
 D. 函数 $f(x) = \log_2(x^2 - 4x - 5)$ 的减区间是 $(-\infty, 0)$

12. 已知定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调递增, 则 “对于任意的 $x \in (0, 1]$, 不等式

$f(ae^x + 2x) + f(x \ln x - x^2) \geq 0$ 恒成立” 的充分不必要条件可以是 ()

- A. $-\frac{1}{e} \leq a < 0$ B. $\frac{1}{e^4} \leq a < \frac{2}{e^3}$ C. $\frac{1}{e^3} \leq a < \frac{1}{e^2}$ D. $\frac{1}{e} \leq a < e$

三、

四、填空题(本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 若函数 $f(x) = x - \frac{\ln x}{x}$, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(e, f(e))$ 处的切线方程为_____.

14. 若定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) = -f(x)$, $f(x+1)$ 是奇函数, 现给出下列 4 个论断:

- ① $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数; ② $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称;
 ③ $f(x)$ 是偶函数; ④ $f(x)$ 的图象经过点 $(-2, 0)$;

其中正确论断的序号是_____ (请填上所有正确论断的序号).

15. 已知函数 $f(x) = x^2 + m$, $g(x) = (\frac{1}{2})^x$, 若 “对任意 $x_1 \in [-1, 3]$, 存在 $x_2 \in [0, 2]$, 使 $f(x_1) \geq g(x_2)$ ” 是真命题, 则实数 m 的取值范围是_____.

16. 已知函数 $f(x) = x(1 + \ln x)$. 若 $k \in \mathbb{Z}$, 且 $k(x - 1) < f(x)$ 对任意 $x > 1$ 恒成立, 则 k 的最大值为_____.

四、解答题(本大题共 6 小题, 共 70 分)

17. 已知函数 $y = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 在 $[1, 2]$ 上的最大值与最小值之和为 20, 记 $f(x) = \frac{a^x}{a^x + 2}$.

(1) 求 a 的值;

(2) 证明 $f(x) + f(1 - x) = 1$, 并求 $f(\frac{1}{2019}) + f(\frac{2}{2019}) + f(\frac{3}{2019}) + \cdots + f(\frac{2018}{2019})$ 的值.

18. 已知 $a > 0$ 且满足不等式 $2^{2a+1} > 2^{5a-2}$.

(1) 求实数 a 的取值范围, 并解不等式 $\log_a(3x + 1) < \log_a(7 - 5x)$.

(2) 若函数 $y = \log_a(2x - 1)$ 在区间 $[1, 3]$ 有最小值为 -2 , 求实数 a 值.

19. 已知函数 $f(x) = x^2 + a \ln x$.

(1) 当 $a = -2$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间和极值;

(2) 若 $g(x) = f(x) + \frac{2}{x}$ 在 $[1, +\infty)$ 上是单调增函数, 求实数 a 的取值范围.

20. 对于两个定义域相同的函数 $f(x)$ 和 $g(x)$, 若存在实数 m, n 使 $h(x)=mf(x)+ng(x)$, 则称函数 $h(x)$ 是由“基函数 $f(x), g(x)$ ”生成的.

(1) 若 $h(x)=3x^2+2x+4$ 是由“基函数 $f(x)=x^2+x, g(x)=kx+1$ ”生成的, 求实数 k 的值;

(2) 试利用“基函数 $f(x)=\log_2(4^x+1), g(x)=x$ ”生成一个函数 $h(x)$, 且同时满足以下条件: ① $h(x)$ 是偶函数; ② $h(x)$ 的最小值为 1. 求 $h(x)$ 的解析式.

21. 已知函数 $f(x)=e^x-x+a, g(x)=\frac{1}{e^x}+x+a^2, a\in R$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若存在 $x\in[0, 2]$, 使得 $f(x)<g(x)$ 成立, 求 a 的取值范围.

22. 已知函数 $f(x)=ae^x-\sin x-1$, 其中 $a\in R, e$ 是自然对数的底数.

(1) 当 $a=1$ 时, 证明: 对 $\forall x\in[0, +\infty), f(x)\geq 0$;

(2) 若函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上存在极值, 求实数 a 的取值范围.

江苏省仪征中学 2021—2022 学年度第一学期高三数学综合练习 3

考试范围：集合、常用逻辑用语、不等式、函数与导数

班级_____ 姓名_____ 学号_____ 评价_____

一、单项选择题(本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分)

1.若 A, B 是全集 I 的真子集,则下列四个命题:① $A \cap B = A$; ② $A \cup B = A$; ③ $A \cap C_I B = \emptyset$; ④ $A \cap B = I$; ⑤ $x \in B$ 是 $x \in A$ 的必要不充分条件. 其中与 $A \subseteq B$ 等价的有()

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【答案】B

【解析】

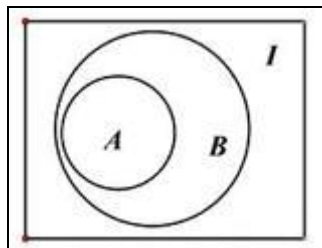
【分析】

本题考查了集合的运算性质、集合之间的关系,属于中档题.

利用集合的运算性质、集合之间的关系即可判断出结论.

【解答】

解: 由 $A \subseteq B$ 得 Venn 图,



① $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$;

② $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$;

③ $A \cap (C_I B) = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq B$;

④ $\begin{cases} A \cap B = I \\ A \subseteq I \\ B \subseteq I \end{cases} \Leftrightarrow A = B = I \Rightarrow A \subseteq B$,

但 $A \subseteq B$ 不一定能得出 $A = B = I$,

故 $A \cap B = I$ 与 $A \subseteq B$ 不等价;

⑤ $x \in B$ 是 $x \in A$ 的必要不充分条件,则 $A \subseteq B$,

但 $A \subseteq B$ 不一定能得 $x \in B$ 是 $x \in A$ 的必要不充分条件，所以不等价。

故和命题 $A \subseteq B$ 等价的有①③，

故选 B.

2. 已知实数 a, b 满足 $\ln a + \ln b = \ln(a + b + 3)$ ，则 $a + b$ 的最小值为 ()

A. $2\sqrt{3}$

B. 4

C. 6

D. $2\sqrt{5}$

【答案】C

【解析】解： $\because \ln(ab) = \ln(a + b + 3)$ ，且 $a > 0$ ， $b > 0$ ，

$$\therefore ab = a + b + 3 \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

$$\therefore (a+b)^2 - 4(a+b) - 12 \geq 0, \text{ 且 } a+b > 0,$$

$$\therefore \text{解得 } a+b \geq 6,$$

$$\therefore a+b \text{ 的最小值为: } 6.$$

故选：C.

根据条件可得出 $ab = a + b + 3$ ，然后根据基本不等式即可得出 $a + b + 3 \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ ，然后可解出 $a+b$ 的范围，从而得出 $a+b$ 的最小值。

本题考查了对数的运算性质，基本不等式的应用，一元二次不等式的解法，考查了计算能力，属于基础题。

3. 若 $0 < x_1 < x_2$ ，则下列函数 ① $f(x) = x$ ； ② $f(x) = x^2$ ； ③ $f(x) = x^3$ ； ④ $f(x) = \sqrt{x}$ ；

⑤ $f(x) = \frac{1}{x}$ 满足条件 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ ($0 < x_1 < x_2$) 的有 ()

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【答案】D

【解析】解：若满足条件

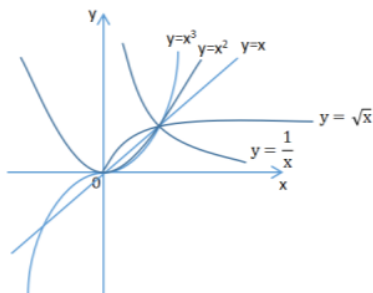
$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} (x_2 > x_1 > 0), \text{ 则}$$

函数图像在 y 轴右侧为下凸函数，

根据函数图象易得④ $f(x) = \sqrt{x}$ 不满足，其余

都可以，

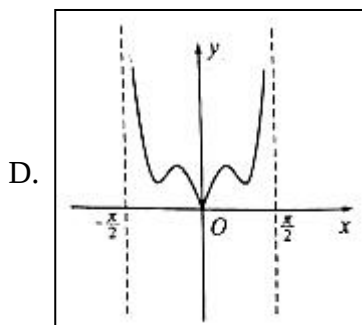
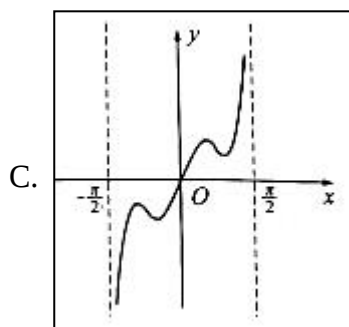
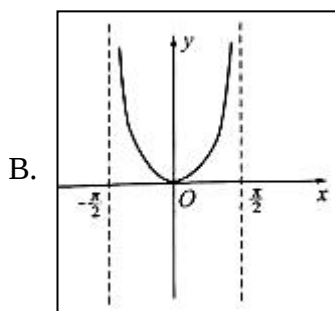
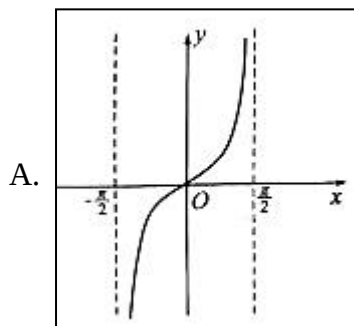
故选：D.



本题要数形结合，通过图像观察.

理解 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} (x_2 > x_1 > 0)$ 的本质，能画出函数图像.

4. 函数 $f(x) = \frac{2^{|x|} \cdot x}{\cos x}$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 的部分图象大致是()



【答案】A

【解析】解：根据题意， $f(x) = \frac{2^{|x|} \cdot x}{\cos x}$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,

有 $f(-x) = -f(x)$ ，即函数 $f(x)$ 为奇函数，排除 B、D，

又由 $y = \cos x$, $y = 2^x$, $y = x$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上分别为减函数、增函数、增函数，且函数值均为正

数，所以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上为增函数，排除 C，

故选：A.

根据题意，先分析函数的奇偶性，排除 BD，再分析函数的单调性，排除 C，即可得答案.

本题考查函数的图象分析，注意用排除法分析，属于基础题.

5. 已知三个函数 $y = x^a$, $y = a^x$, $y = \log_a x$, 则 ()

A. 对任意的 $a > 0$, 三个函数定义域都为 $\mathbf{R}$

B. 存在 $a > 0$, 三个函数值域都为 $\mathbf{R}$

C. 对任意的 $a > 0$ ，三个函数都是奇函数

D. 存在 $a > 0$ ，三个函数在其定义域上都是增函数

【答案】D

【解析】

【分析】

本题考查全称量词命题、存在量词命题的否定及真假判定，涉及函数定义域与值域，函数的单调性与单调区间，函数的奇偶性，指数、对数及幂函数，属于中档题.

根据指数函数、对数函数、幂函数的性质，利用全称量词命题、存在量词命题真假判断的方法对选项逐一判断即可.

【解答】

解：对于 A，当 $a = \frac{1}{2}$ 时， $y = x^a = \sqrt{x}$ ，定义域为 $[0, +\infty)$ ，故 A 错误；

对于 B， $y = a^x$ ，当 $a = 1$ 时， $y = a^x = 1$ ，值域为 $\{1\}$ ，当 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ 时， $y = a^x$ 是指数函数，值域为 $(0, +\infty)$ ，故 B 错误；

对于 C，当 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ 时， $y = a^x$ 是指数函数，是非奇非偶函数，故 C 错误；

对于 D，当 $a = 3$ 时，三个函数 $y = x^a$ ， $y = a^x$ ， $y = \log_a x$ 在其定义域上都是增函数，故 D 正确.

故选 D.

5. 已知 a, b, c 为正实数，满足 $\left(\frac{1}{2}\right)^a = \log_2 a$ ， $\left(\frac{1}{2}\right)^b = b^2$ ， $\frac{1}{c^2} = 2^{-c}$ ，则 a, b, c 的大小关系为 ()

A. $a < c < b$

B. $b < c < a$

C. $c < a < b$

D. $c < b < a$

【答案】D

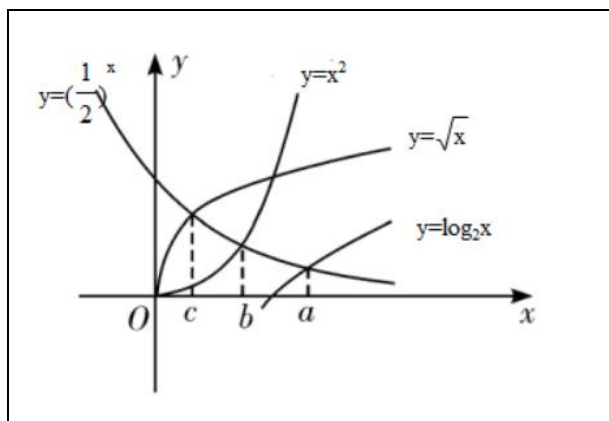
【解析】

【分析】

本题考查三个数的大小的比较，考查指数函数、对数函数和幂函数的单调性等基础知识，考查了数形结合思想，是基础题. 作 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ， $y = \log_2 x$ ， $y = x^2$ ， $y = x^{\frac{1}{2}}$ 的图象，数形结合可求出 a, b, c 的大小关系.

【解答】

解：作 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ， $y = \log_2 x$ ， $y = x^2$ ， $y = x^{\frac{1}{2}}$ 的图象，



由题可知 a 即为 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 与 $y = \log_2 x$ 的交点横坐标,

b 即为 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 与 $y = x^2$ 交点的横坐标,

c 即为 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 与 $y = \sqrt{x}$ 交点的横坐标,

由图可知 $c < b < a$,

故选 D .

6. 已知函数 $f(x) = \log_2(-x^2 - mx + 16)$ 在 $[-2, 2]$ 上单调递减, 则 m 的取值范围是 ()

A. $[4, +\infty)$

B. $(-6, 6)$

C. $(-6, 4]$

D. $[4, 6)$

【答案】 D

【解析】解: $\because$ 函数 $f(x) = \log_2(-x^2 - mx + 16)$ 在 $[-2, 2]$ 上单调递减,

$\therefore f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上单调递减, 且大于零, 故有
$$\begin{cases} -\frac{m}{2} \leq -2 \\ -4 - 2m + 16 > 0 \end{cases},$$

求得 $4 \leq m < 6$,

故选: D .

由题意利用复合函数的单调性, 二次函数、对数函数的性质可得
$$\begin{cases} -\frac{m}{2} \leq -2 \\ -4 - 2m + 16 > 0 \end{cases},$$
 由此求得 m 的范围.

本题主要考查复合函数的单调性, 二次函数、对数函数的性质, 属于中档题.

6. 定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(-x) = -f(x)$, $f(x) = f(x+4)$, 且当 $x \in (-1, 0)$ 时, $f(x) = 2^x + \frac{1}{5}$, 则 $f(\log_2 24) = (\quad)$

A. $\frac{17}{10}$

B. $\frac{4}{5}$

C. $\frac{13}{15}$

D. $\frac{14}{15}$

【答案】C

【解析】

【分析】

本题考查了函数的奇偶性、周期性、指数函数与对数函数的运算性质，考查了推理能力与计算能力，属于中档题.

$2^4 < 24 < 2^5$ ，可得 $\log_2 24 \in (4, 5)$. 由于定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足: $f(-x) + f(x) = 0$, $f(x+4) = f(x)$ ，可得 $f(-x) = -f(x)$ ，周期 $T=4$. 利用奇偶性周期性经过变形即可得出.

【解答】

解: $\because 2^4 < 24 < 2^5$,

$\therefore \log_2 24 \in (4, 5)$.

定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足: $f(-x) + f(x) = 0$, $f(x+4) = f(x)$,

$\therefore f(-x) = -f(x)$ ，周期 $T=4$.

$\therefore f(\log_2 24) = f(\log_2 24 - 4)$

$$= -f(4 - \log_2 24) = -\left(2^{\frac{4 - \log_2 24}{5}} + \frac{1}{5}\right)$$

$$= -\left(\frac{16}{24} + \frac{1}{5}\right) = -\frac{13}{15}.$$

故选: C.

7. 已知函数 $f(x)$ 满足 $xf'(x) \ln x + f(x) > 0$ 其中 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导数，若 $a = f(e^{\frac{1}{2}})$,

$b = f(e)$, $c = f(e^2)$, 则下列选项中正确的是 ()

A. $4c < 2b < a$

B. $2b < 4c < a$

C. $a < 2b < 4c$

D. $a < 4c < 2b$

【答案】C

【解析】解: $xf'(x) \ln x + f(x) > 0 (x > 0) \Rightarrow f'(x) \ln x + \frac{1}{x}f(x) > 0 \Rightarrow [f(x) \ln x]' > 0$,

令 $g(x) = f(x) \ln x$,

则 $g'(x) > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立 $\Rightarrow g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数

$$\Rightarrow g(e^{\frac{1}{2}}) < g(e) < g(e^2) \Rightarrow \frac{1}{2}a < b < 2c \Rightarrow a < 2b < 4c,$$

故选: **C**.

构造函数 $g(x) = f(x) \ln x (x > 0)$, 由题意可得, $\forall x \in (0, +\infty)$, $g'(x) > 0 \Rightarrow g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数, 从而可得答案.

本题考查利用导数研究函数的单调性, 考查构造法的运用, 考查运算求解能力, 是中档题.

8. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = f(3x)$, 当 $x \in [1, 3), f(x) = \ln x$, 若在区间 $[1, 9)$ 内, 函数 $g(x) = f(x) - ax$ 有三个不同零点, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $\left(\frac{\ln 3}{3}, \frac{1}{e}\right)$

B. $\left(\frac{\ln 3}{9}, \frac{1}{3e}\right)$

C. $\left(\frac{\ln 3}{9}, \frac{1}{2e}\right)$

D. $\left(\frac{\ln 3 \ln 3}{9}, \frac{1}{3}\right)$

【答案】B

【解析】

【分析】

本题主要考查函数的零点与方程的根的关系, 同时考查函数的单调性与最值, 体现了化归与转化、数形结合的数学思想, 属于难题.

可以根据函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = f(3x)$, 求出 $x \in [3, 9)$ 上的解析式, 在区间 $[1, 9)$ 内, 函数 $g(x) = f(x) - ax$ 有三个不同零点, 可转化成 “ $f(x) - ax = 0$ 在区间 $[1, 9)$ 上有三个解, 即 $a = \frac{f(x)}{x}$ 有三个解”, 最后转化成 $y = a$ 与 $h(x) = \frac{f(x)}{x}$ 的图象有三个交点, 根据函数的单调性画出函数 $h(x)$ 的图象, 即可求出所求.

【解答】

解: 设 $x \in [3, 9)$, 则 $\frac{x}{3} \in [1, 3)$, $\because x \in [1, 3), f(x) = \ln x, \therefore f\left(\frac{x}{3}\right) = \ln \frac{x}{3}$,

$\because$ 函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = f(3x)$,

$$\therefore f\left(\frac{x}{3}\right) = f(x) = \ln \frac{x}{3},$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} \ln x, & 1 \leq x < 3 \\ \ln \frac{x}{3}, & 3 \leq x < 9 \end{cases},$$

$\because$ 在区间 $[1, 9)$ 内, 函数 $g(x) = f(x) - ax$ 有三个不同零点,

$\therefore f(x) - ax = 0$ 在区间 $[1, 9)$ 上有三个解, 即 $a = \frac{f(x)}{x}$ 有三个解,

则 $y=a$ 与 $h(x) = \frac{f(x)}{x}$ 的图象有三个交点,

当 $x \in [1, 3)$, $h(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{\ln x}{x}$, 则 $h'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, 令 $h'(x) = 0$, 解得 $x=e$,

$\therefore$ 当 $x \in [1, e)$ 时, $h'(x) > 0$, 当 $x \in (e, 3)$ 时, $h'(x) < 0$,

即函数 $h(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{\ln x}{x}$ 在 $[1, e)$ 上单调递增, 在 $(e, 3)$ 上单调递减,

$\therefore$ 当 $x=e$ 处, 函数 $h(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{\ln x}{x}$ 在 $[1, 3)$ 上取最大值 $\frac{1}{e}$,

当 $x \in [3, 9)$, $h(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{\ln_3 x}{x}$, 则 $h'(x) = \frac{1 - \ln_3 x}{x^2} = 0$, 解得 $x=3e$,

$\therefore$ 当 $x \in [3, 3e)$ 时, $h'(x) > 0$, 当 $x \in (3e, 9)$ 时, $h'(x) < 0$,

即函数 $h(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{\ln_3 x}{x}$ 在 $[3, 3e)$ 上单调递增, 在 $(3e, 9)$ 上单调递减,

$\therefore$ 当 $x=3e$ 处, 函数 $h(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{\ln_3 x}{x}$ 在 $[3, 9)$ 上取最大值 $\frac{1}{3e}$,

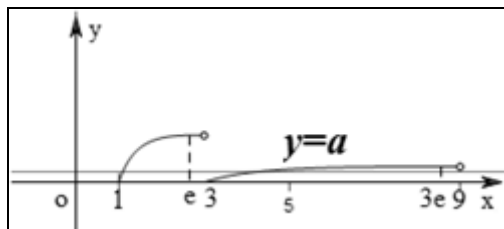
根据函数的单调性, 以及 $h(1) = 0$, $h(e) = \frac{1}{e}$, $h(3) = 0$, $h(3e) = \frac{1}{3e}$, $h(9) = \frac{\ln 3}{9}$,

画出函数的大致图象, 根据图象可知 $y=a$ 与 $h(x)$ 在 $[1, 3)$ 上一个交点, 在 $[3, 3e)$ 上两个交点,

$\therefore$ 在区间 $[1, 9)$ 内, 函数 $g(x) = f(x) - ax$ 有三个不同零点,

则实数 a 的取值范围是 $(\frac{\ln 3}{9}, \frac{1}{3e})$.

故选 B.



二、多项选择题(本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

9. 下列函数中, 既是偶函数, 又在 $(0, +\infty)$ 上单调递增的是 ()

A. $y = x^3$

B. $y = x^{-2}$

C. $y = e^{|x|}$

D. $y = \lg x^2$

【答案】CD

【解析】

【分析】

本题考查函数的奇偶性和单调性，属于基础题.

逐个判断奇偶性和单调性即可.

【解答】

解：因为 $y = x^3 (x \in R)$ ，满足 $f(-x) = -f(x)$ ，是奇函数，故 A 错误；

因为 $y = x^{-2} (x \neq 0)$ ，满足 $f(-x) = f(x)$ ，是偶函数，但在 $(0, +\infty)$ 上递减，故 B 错误；

因为 $y = e^{|x|} (x \in R)$ 和 $y = \lg x^2 (x \neq 0)$ 都满足 $f(-x) = f(x)$ ，是偶函数，且都在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，

故 CD 正确，

故选 CD.

10. 下列说法正确的是()

A. “ $a > 1$ ”是“ $a^2 > 1$ ”的充分不必要条件

B. “ $\frac{4}{3} < a < 2$ ”是“ $(a-1)^{-2} < (2a-3)^{-2}$ ”的充要条件

C. 命题“ $\forall x \in R, x^2 + 1 < 0$ ”的否定是“ $\exists x \in R$ ，使得 $x^2 + 1 \geq 0$ ”

D. 已知函数 $y = f(x)$ 的定义域为 R ，则“ $f(0) = 0$ ”是“函数 $y = f(x)$ 为奇函数”的必要不充分条件

【答案】ACD

【解析】

【分析】

本题考查必要条件、充分条件与充要条件的判断，考查全称量词命题的否定的判定，属于基础题. 根据各选项涉及的相关知识即可判断出结果.

【解答】

解： $a^2 > 1 \Leftrightarrow a < -1$ 或 $a > 1$ ，故 A 正确；

考查幂函数 $y = x^{-2}$ ，在 $(0, +\infty)$ 上单调递减，且为偶函数，由 $(a-1)^{-2} < (2a-3)^{-2}$ ，

知 $|a-1| > |2a-3| \Leftrightarrow \frac{4}{3} < a < 2$ ，又 $2a-3 \neq 0$ ，则 $a \neq \frac{3}{2}$ ，所以 $(a-1)^{-2} < (2a-3)^{-2} \Leftrightarrow \frac{4}{3} < a < 2$ 且 $a \neq \frac{3}{2}$ ，

“ $\frac{4}{3} < a < 2$ ”是“ $(a-1)^{-2} < (2a-3)^{-2}$ ”的必要不充分条件，故 B 错误；

根据全称量词命题的否定的判定依据可知，C 正确；

函数 $y = f(x)$ 定义域为 R ，若为奇函数，则必有 $f(0) = 0$ ；反之未必，故 D 正确。

故选 ACD.

11. 下列说法正确的是 ()

A. 若函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 2]$ ，则函数 $f(2x)$ 的定义域为 $[0, 1]$

B. $y = \frac{x+1}{x+2}$ 的图象关于 $(-2, 1)$ 成中心对称

C. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+1}$ 的最大值为 $\frac{1}{2}$

D. 函数 $f(x) = \log_2(x^2 - 4x - 5)$ 的减区间是 $(-\infty, 0]$

【答案】AB

【解析】

【分析】

本题考查复合函数的定义域、函数的对称性及指数、对数函数的性质，属于中档题。

由复合函数的定义域解决 A，由函数的图像变换知识解决 B，由指数函数及复合函数知识解决 C，由对数函数及复合函数知识解决 D。

【解答】

解：对于 A，函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 2]$ ，则函数 $f(2x)$ 的定义域由 $0 \leq 2x \leq 2$ 确定，这时 $0 \leq x \leq 1$ ，所以函数 $f(2x)$ 的定义域为 $[0, 1]$ ，故 A 正确；

对于 B，因为 $y = -\frac{1}{x}$ 的对称中心 $(0, 0)$ ，将函数 $y = -\frac{1}{x}$ 的图象向左平移 2 个单位，向上平移 1 个单位得到 $y = \frac{x+1}{x+2} = 1 - \frac{1}{x+2}$ ，对称中心为 $(-2, 1)$ ，故 B 正确；

对于 C， $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+1}$ ，因为 $-x^2 + 1 \leq 1$ ，所以 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+1} \geq \frac{1}{2}$ ，所以当 $x = 0$ 时函数取得的最小值为 $\frac{1}{2}$ ，故 C 错误；

对于 D，由 $x^2 - 4x - 5 > 0$ 解得： $x < -1$ 或 $x > 5$ 。当 $x < -1$ 时， $t = x^2 - 4x - 5$ 的图象开口向上，对称轴为 $x = 2$ ，单调递减，所以函数 $y = \log_2 t$ 单调递减，因此 $f(x)$ 的减区间是 $(-\infty, -1]$ ，故 D 错误；
故选 AB。

12. 已知定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调递增, 则“对于任意的 $x \in (0, 1]$, 不等式 $f(ae^x + 2x) + f(x \ln x - x^2) \geq 0$ 恒成立”的充分不必要条件可以是

A. $-\frac{1}{e} \leq a < 0$

B. $\frac{1}{e^4} \leq a < \frac{2}{e^3}$

C. $\frac{1}{e^3} \leq a < \frac{1}{e^2}$

D. $\frac{1}{e} \leq a < e$

【答案】CD

【解析】

【分析】

本题考查充分不必要条件的判定, 函数的奇偶性, 利用导数研究函数的单调性与极值、最值, 导数中的恒成立问题, 属较难题.

由奇函数和单调性可得 $\frac{ae^x}{x} + \ln x - x + 2 \geq 0$ 对于任意的 $x \in (0, 1]$ 恒成立. 令 $g(x) = \frac{ae^x}{x} + \ln x - x + 2$,

利用导数讨论函数 $g(x)$ 的最小值, 求解问题的充要条件, 再判定充分不必要条件即可.

【解答】

解: 因为定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调递增, 所以 $f(x)$ 在 R 上单调递增, 所以不等式 $f(ae^x + 2x) + f(x \ln x - x^2) \geq 0$ 即为 $f(ae^x + 2x) \geq -f(x \ln x - x^2) = f(x^2 - x \ln x)$ 对于任意的 $x \in (0, 1]$ 恒成立, 所以 $ae^x + 2x \geq x^2 - x \ln x$, 也即 $\frac{ae^x}{x} + \ln x - x + 2 \geq 0$ 对于任意的 $x \in (0, 1]$ 恒成立.

令 $g(x) = \frac{ae^x}{x} + \ln x - x + 2$, 则 $g'(x) = \frac{ae^x(x-1)}{x^2} + \frac{1}{x} - 1 = \frac{(ae^x - x)(x-1)}{x^2}$,

当 $a \leq 0$ 时, $g'(x) \geq 0$ 在 $x \in (0, 1]$ 恒成立, 所以 $g(x)$ 在 $(0, 1]$ 单调递增, 又当 $x \rightarrow 0$ 时, $g(x) \rightarrow -\infty$, 所以 $g(x) \geq 0$ 不成立;

令 $h(x) = \frac{x}{e^x} (0 < x \leq 1)$, 则 $h'(x) = \frac{1-x}{e^x} \geq 0$ 在 $x \in (0, 1]$ 恒成立, 所以 $h(x)$ 在 $(0, 1]$ 单调递增, 所以

$h(x) \leq h(1) = \frac{1}{e}$, 即 $\frac{x}{e^x} \leq \frac{1}{e}$.

所以当 $a \geq \frac{1}{e}$ 时, $ae^x - x \geq 0$ 在 $x \in (0, 1]$ 恒成立, 所以 $g'(x) \leq 0$ 在 $x \in (0, 1]$ 恒成立, 所以 $g(x)$ 在 $(0, 1]$ 单调递减, 所以有 $g(x) \geq g(1) = ae + 1 \geq 0$ 成立, 故 $a \geq \frac{1}{e}$ 时 $g(x) \geq 0$ 在 $x \in (0, 1]$ 恒成立;

当 $0 < a < \frac{1}{e}$ 时, 存在 $x_0 \in (0, 1)$, 使得 $ae^{x_0} - x_0 = 0$, 所以当 $0 < x < x_0$ 时, $ae^x - x > 0$, 所以 $g'(x) < 0$,

所以 $g(x)$ 在 $(0, x_0)$ 单调递减; 当 $x_0 < x < 1$ 时, $ae^x - x < 0$, 所以 $g'(x) > 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(x_0, 1)$ 单调

递增. 所以 $g(x) \geq g(x_0) = \frac{ae^{x_0}}{x_0} + \ln x_0 - x_0 + 2$, 因为 $ae^{x_0} - x_0 = 0$, 所以 $ae^{x_0} = x_0$, 且

$\ln x_0 = \ln(ae^{x_0}) = \ln a + x_0$, 所以 $g(x_0) = 1 + \ln a + x_0 - x_0 + 2 = \ln a + 3$, 所以由 $g(x_0) \geq 0$, 可得 $a \geq \frac{1}{e^3}$,

所以 $\frac{1}{e^3} \leq a < \frac{1}{e}$ 时 $g(x) \geq 0$ 在 $x \in (0, 1]$ 恒成立.

综上所述, $a \geq \frac{1}{e^3}$ 时 $g(x) \geq 0$ 在 $x \in (0, 1]$ 恒成立.

所以“对于任意的 $x \in (0, 1]$, 不等式 $f(ae^x + 2x) + f(x \ln x - x^2) \geq 0$ 恒成立”的充分不必要条件可以是 CD .

故选: CD .

五、填空题(本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 若函数 $f(x) = x - \frac{\ln x}{x}$, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(e, f(e))$ 处的切线方程为_____.

【答案】解: (1) 当 $a = 1$ 时, $f(x) = x - \frac{\ln x}{x}$, $f'(x) = 1 - \frac{1 - \ln x}{x^2}$,
 $f'(e) = 1$, $f(e) = e - \frac{1}{e}$,

则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(e, f(e))$ 处的切线方程为 $x - y - \frac{1}{e} = 0$.

14. 若定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) = -f(x)$, $f(x+1)$ 是奇函数, 现给出下列 4 个论断:

① $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数;

② $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称;

③ $f(x)$ 是偶函数;

④ $f(x)$ 的图象经过点 $(-2, 0)$;

其中正确论断的序号是_____ (请填上所有正确论断的序号).

【答案】①②③

【解析】

【分析】

本题主要考查函数的奇偶性、周期性和对称性，属于中档题.

由 $f(x+2) = -f(x)$ 可得函数的周期为4； $f(x)$ 的图象向左平移1个单位后得到 $f(x+1)$ 的图象，由 $f(x+1)$ 是奇函数可得 $f(x)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称，再通过转化即可得到 $f(x)$ 是偶函数.

【解答】

解：由 $f(x+2) = -f(x)$ 得 $f(x+4) = -f(x+2) = f(x)$ ，所以函数 $f(x)$ 的周期为4，故①正确；

由 $f(x+1)$ 是奇函数，知 $f(x+1)$ 的图象关于原点对称，所以函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称，故②正确；

由 $f(x+1)$ 是奇函数得 $f(1+x) = -f(1-x)$ ，又 $f(x+2) = -f(x)$ ，

所以 $f(-x) = -f(-x+2)$

$= -f(1+1-x) = f(1-(1-x)) = f(x)$ ，

所以函数 $f(x)$ 是偶函数，故③正确；

$f(-2) = -f(-2+2) = -f(0)$ ，无法判断其值，故④错误.

综上，正确论断的序号是：①②③.

故答案为①②③.

15. 已知函数 $f(x) = x^2 + m$, $g(x) = (\frac{1}{2})^x$, 若“对任意 $x_1 \in [-1,3]$, 存在 $x_2 \in [0,2]$, 使 $f(x_1) \geq g(x_2)$ ”是真命题，则实数 m 的取值范围是_____.

【答案】 $[\frac{1}{4}, +\infty)$

【解析】

【分析】

本题主要考查函数最值的应用，二次函数与指数函数的值域的求解，根据条件转化为求函数的最值问题是解决本题的关键，但是要注意不要把本题中的条件当成函数的恒成立问题，属于中档题.

由对任意 $x_1 \in [-1, 3]$, 存在 $x_2 \in [0, 2]$, $f(x_1) \geq g(x_2)$, 可知 $f(x)_{\min} \geq g(x)_{\min}$, 结合二次函数及指数函数的性质可求.

【解答】

解: 由题意知对任意 $x_1 \in [-1, 3]$, $f(x_1) \in [m, 9 + m]$,

所以当 $x \in [-1, 3]$ 时, $f(x)_{\min} = m$,

存在 $x_2 \in [0, 2]$, 使 $f(x_1) \geq g(x_2)$, 只要满足当 $x \in [0, 2]$ 时, $g(x)_{\min} \leq m$,

又 $g(x)$ 是单调减函数,

故当 $x \in [0, 2]$ 时, $g(x)_{\min} = g(2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$,

所以 $m \geq \frac{1}{4}$.

故答案为 $\left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$.

16. 已知函数 $f(x) = x(1 + \ln x)$. 若 $k \in \mathbb{Z}$, 且 $k(x-1) < f(x)$ 对任意 $x > 1$ 恒成立, 则 k 的最大值为_____.

【答案】解: (1) 因为 $f'(x) = \ln x + 2$,

令 $f'(x) > 0$, 得 $x > \frac{1}{e^2}$;

令 $f'(x) < 0$, 得 $0 < x < \frac{1}{e^2}$;

所以 $f(x)$ 的递增区间为 $\left(\frac{1}{e^2}, +\infty\right)$, $f(x)$ 的递减区间为 $\left(0, \frac{1}{e^2}\right)$.

所以当 $x = \frac{1}{e^2}$ 时, 函数取值极小值,

极小值为 $f\left(\frac{1}{e^2}\right) = \frac{1}{e^2}\left(1 + \ln \frac{1}{e^2}\right) = -\frac{1}{e^2}$, 无极大值;

(2) 由(1)知, $f(x) = x(1 + \ln x)$, 所以 $k(x-1) < f(x)$ 对任意 $x > 1$ 恒成立,

即 $k < \frac{x+x\ln x}{x-1}$ 对任意 $x > 1$ 恒成立.

$$\text{令 } g(x) = \frac{x+x\ln x}{x-1},$$

$$\text{则 } g'(x) = \frac{x-\ln x-2}{(x-1)^2},$$

$$\text{令 } h(x) = x - \ln x - 2 (x > 1),$$

$$\text{则 } h'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} > 0,$$

所以函数 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增.

$$\text{因为 } h(3) = 1 - \ln 3 < 0, \quad h(4) = 2 - 2\ln 2 > 0,$$

所以方程 $h(x) = 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上存在唯一实根 $x_0 \in (3, 4)$,

$$\text{当 } 1 < x < x_0 \text{ 时, } h(x) < 0, \text{ 即 } g'(x) < 0,$$

$$\text{当 } x > x_0 \text{ 时, } h(x) > 0, \text{ 即 } g'(x) > 0,$$

所以函数 $g(x) = \frac{x+x\ln x}{x-1}$ 在 $(1, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增.

$$\text{所以 } [g(x)]_{\min} = g(x_0) = \frac{x_0(1+\ln x_0)}{x_0-1} = \frac{x_0(1+x_0-2)}{x_0-1} = x_0 \in (3, 4).$$

$$\text{所以 } k < [g(x_0)]_{\min} = x_0 \in (3, 4).$$

故整数 k 的最大值是 3.

四、解答题(本大题共 6 小题,共 70 分)

17. 已知函数 $y = a^x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$ 在 $[1, 2]$ 上的最大值与最小值之和为 20, 记 $f(x) = \frac{a^x}{a^x + 2}$.

(1) 求 a 的值;

(2) 证明 $f(x) + f(1-x) = 1$, 并求 $f(\frac{1}{2019}) + f(\frac{2}{2019}) + f(\frac{3}{2019}) + \cdots + f(\frac{2018}{2019})$ 的值.

【答案】解: (1) 函数 $y = a^x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$ 在 $[1, 2]$ 上单调递增或单调递减,

所以 $a + a^2 = 20, a = 4$ 或 $a = -5$ (舍去),

即 $a = 4$;

(2) 由 (1) 知 $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$

所以 $f(x) + f(1-x) = \frac{4^x}{4^x + 2} + \frac{4^{1-x}}{4^{1-x} + 2}$

$$= \frac{4^x}{4^x + 2} + \frac{\frac{4}{4^x}}{\frac{4}{4^x} + 2} = \frac{4^x}{4^x + 2} + \frac{2}{4^x + 2} = 1;$$

所以 $f(\frac{1}{2019}) + f(\frac{2018}{2019}) = 1,$

... ..

$$f(\frac{1009}{2019}) + f(\frac{1010}{2018}) = 1,$$

所以原式 $= 1 + 1 + \cdots + 1 = 1009$.

【解析】 本题考查指数与指数幂的运算, 考查指数函数的性质, 属于中档题.

(1) 利用指数函数的单调性即可;

(2) 利用指数幂的运算即可;

(3) 寻求规律易得结果.

18. 已知 $\boxed{a > 0}$ 且满足不等式 $\boxed{2^{2a+1} > 2^{5a-2}}$.

(1) 求实数 a 的取值范围, 并解不等式 $\boxed{\log_a(3x+1) < \log_a(7-5x)}$.

(2) 若函数 $y = \log_a(2x-1)$ 在区间 $[1, 3]$ 有最小值为 -2 ，求实数 a 值.

【答案】 解：(1) $\because 2^{2a+1} > 2^{5a-2}$,

$$\therefore 2a+1 > 5a-2, \text{ 即 } 3a < 3,$$

$$\therefore a < 1,$$

$$\text{又} \because a > 0,$$

$$\therefore 0 < a < 1.$$

$$\text{由 } 0 < a < 1, \therefore \log_a(3x+1) < \log_a(7-5x).$$

$$\text{等价于 } \begin{cases} 3x+1 > 0 \\ 7-5x > 0 \\ 3x+1 > 7-5x \end{cases},$$

$$\text{即 } \begin{cases} x > -\frac{1}{3} \\ x < \frac{7}{5} \\ x > \frac{3}{4} \end{cases},$$

$$\therefore \frac{3}{4} < x < \frac{7}{5},$$

即不等式的解集为 $(\frac{3}{4}, \frac{7}{5})$.

$$(2) \because 0 < a < 1,$$

$\therefore$ 函数 $y = \log_a(2x-1)$ 在区间 $[1, 3]$ 上为减函数,

$\therefore$ 当 $x=3$ 时, y 有最小值为 -2 ,

$$\text{即 } \log_a 5 = -2,$$

$$\therefore a^{-2} = \frac{1}{a^2} = 5,$$

$$\text{解得 } a = \frac{\sqrt{5}}{5} \text{ 或 } a = -\frac{\sqrt{5}}{5} (\text{舍去}),$$

$$\text{所以 } a = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

【解析】 本题指数函数和对数函数的性质，考查了计算能力，属于中档题.

(1) 根据指数函数的单调性可得 $2a+1 > 5a-2$ ，结合 $a > 0$ 即可求实数 a 的取值范围；

(2) 根据对数函数的单调性可列出不等式组 $\begin{cases} 3x+1 > 0 \\ 7-5x > 0 \\ 3x+1 > 7-5x \end{cases}$ ，求解即可；

(3) 根据复合函数的单调性以及对数的性质即可求出 a 的值.

19. 已知函数 $f(x) = x^2 + a \ln x$.

(I) 当 $a = -2$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间和极值;

(II) 若 $g(x) = f(x) + \frac{2}{x}$ 在 $[1, +\infty)$ 上是单调增函数, 求实数 a 的取值范围.

【答案】解: (I) $\because$ 函数 $f(x) = x^2 + a \ln x$,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

当 $a = -2$ 时, $f(x) = x^2 - 2 \ln x$,

$$\text{则 } f'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2(x+1)(x-1)}{x},$$

当 x 变化时, $f'(x)$ 和 $f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	递减	极小值	递增

由上表可知, 函数 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(0, 1)$, 单调递增区间是 $(1, +\infty)$,

极小值是 $f(1) = 1$.

$$(II) \text{ 由 } g(x) = x^2 + a \ln x + \frac{2}{x}, \text{ 得 } g'(x) = 2x + \frac{a}{x} - \frac{2}{x^2},$$

因为函数 $g(x)$ 为 $[1, +\infty)$ 上的单调增函数,

则 $g'(x) \geq 0$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立,

即不等式 $2x - \frac{2}{x^2} + \frac{a}{x} \geq 0$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立,

也即 $a \geq \frac{2}{x} - 2x^2$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立.

$$\text{令 } \varphi(x) = \frac{2}{x} - 2x^2, \text{ 则 } \varphi'(x) = -\frac{2}{x^2} - 4x,$$

$$\text{当 } x \in [1, +\infty) \text{ 时, } \varphi'(x) = -\frac{2}{x^2} - 4x < 0,$$

$\therefore \varphi(x) = \frac{2}{x} - 2x^2$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减,

$$\therefore \varphi(x)_{\max} = \varphi(1) = 0.$$

$$\therefore a \geq 0.$$

$$\therefore a \text{ 的取值范围为 } [0, +\infty).$$

【解析】 本题考查函数的单调区间和极值的求法，考查实数的取值范围的求法，是中档题，解题时要认真审题，注意构造法和导数性质的合理运用.

(I) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ ，当 $a = -2$ 时， $f'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2(x+1)(x-1)}{x}$ ，由此利用导数性质能求出函数 $f(x)$ 的单调区间和极值；

(II) 由 $g(x) = x^2 + a \ln x + \frac{2}{x}$ ，得 $g'(x) = 2x + \frac{a}{x} - \frac{2}{x^2}$ ， $\varphi'(x) = -\frac{2}{x^2} - 4x$ ，函数 $g(x)$ 为 $[1, +\infty)$ 上的单调增函数，则 $g'(x) \geq 0$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立，即 $a \geq \frac{2}{x} - 2x^2$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立，令 $\varphi(x) = \frac{2}{x} - 2x^2$ ，由此利用导数性质即可求出 a 的取值范围.

20. 已知函数 $f(x) = e^x - x + a$ ， $g(x) = \left[\frac{1}{e^x}\right] + x + a^2$ ， $a \in \mathbb{R}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 若存在 $x \in [0, 2]$ ，使得 $f(x) < g(x)$ 成立，求 a 的取值范围；

【答案】解： (1) 由函数 $f(x) = e^x - x + a$ ，

$$\text{求导 } f'(x) = e^x - 1,$$

$$\text{令 } f'(x) = 0, \text{ 解得: } x = 0,$$

当 $x > 0$ 时， $f'(x) > 0$ ，函数单调递增，

当 $x < 0$ 时， $f'(x) < 0$ ，函数单调递减，

$\therefore f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, +\infty)$ ，单调递减区间为 $(-\infty, 0)$ ；

(2) 记 $F(x) = f(x) - g(x)$ ，

$$\text{则 } F(x) = e^x - \left[\frac{1}{e^x}\right] - 2x + a - a^2,$$

$$\text{求导 } F'(x) = e^x + \left[\frac{1}{e^x}\right] - 2,$$

$$\text{由 } e^x > 0, \left[\frac{1}{e^x}\right] > 0,$$

$$\therefore e^x + \left[\frac{1}{e^x}\right] - 2 \geq 2\sqrt{e^x \cdot \frac{1}{e^x}} - 2 = 0,$$

当且仅当 $x=0$ 时等号成立,

$$\therefore F'(x) \geq 0,$$

$\therefore$ 函数 $F(x)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 上的增函数,

$\therefore$ 当 $x \in [0, 2]$ 时, $F(x)$ 的最小值为 $F(0) = a - a^2$,

$\therefore$ 存在 $x \in [0, 2]$, 使得 $f(x) < g(x)$ 成立,

$\therefore F(x)$ 的最小值小于 0, 即 $a - a^2 < 0$,

解得: $a > 1$ 或 $a < 0$;

【解析】 本题考查导数的综合应用, 考查利用导数求函数的单调性及最值, 考查导数与不等式的综合利用, 考查导数恒成立的应用, 考查计算能力, 属于较难题.

(1) 求出函数的导数 $f'(x) = e^x - 1$, 令 $f'(x) > 0$, 求得函数单调递增区间, 令 $f'(x) < 0$, 求得函数单调递减区间;

(2) 记 $F(x) = f(x) - g(x) = e^x - \frac{1}{e^x} - 2x + a - a^2$, 求出函数的导数 $F'(x) = e^x + \frac{1}{e^x} - 2$, 确定函数的单调区间, 求出 $F(x)$ 的最小值, 从而求出 a 的范围;

22. 已知函数 $f(x) = ae^x - \sin x - 1$, 其中 $a \in \mathbb{R}$, e 是自然对数的底数.

(1) 当 $a=1$ 时, 证明: 对 $\forall x \in [0, +\infty)$, $f(x) \geq 0$;

(2) 若函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上存在极值, 求实数 a 的取值范围.

【答案】 (1) 证明: 当 $a=1$ 时, $f(x) = e^x - \sin x - 1$, $f'(x) = e^x - \cos x$,

当 $x \in [0, +\infty)$ 时, $e^x \geq 1$, 且 $\cos x \leq 1$,

所以当 $x \in [0, +\infty)$ 时, $f'(x) = e^x - \cos x \geq 0$, 且 $x=0$ 时, $f'(x) = 0$,

函数 $f(x) = e^x - \sin x - 1$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, $f(x) \geq f(0) = 0$,

所以, 对 $\forall x \in [0, +\infty)$, $f(x) \geq 0$.

(2) 解: 法一: 若函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上存在极值,

则 $f'(x) = ae^x - \cos x$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上存在零点.

① 当 $a \in (0, 1)$ 时, $f'(x) = ae^x - \cos x$ 为 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上的增函数,

$$f'(0) = a - 1 < 0, \quad f'(\frac{\pi}{2}) = ae^{\frac{\pi}{2}} > 0,$$

则存在唯一实数 $x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$, 使得 $f'(x_0) = 0$ 成立,

当 $x \in (0, x_0)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 为 $(0, x_0)$ 上的减函数;

当 $x \in (x_0, \frac{\pi}{2})$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 为 $(x_0, \frac{\pi}{2})$ 上的增函数,

所以 $x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ 为函数 $f(x)$ 的极小值点;

② 当 $a \geq 1$ 时, $f'(x) = ae^x - \cos x \geq e^x - \cos x > 0$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上恒成立,

函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增, $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上无极值;

③ 当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) = ae^x - \cos x < 0$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上恒成立,

函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递减, $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上无极值.

综上知, 使 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上存在极值的 a 的取值范围是 $(0, 1]$.

(2) 法二: 若函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上存在极值,

则 $f'(x) = ae^x - \cos x$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上存在零点,

$$\text{令 } f'(x) = 0, \text{ 则 } a = \frac{\cos x}{e^x},$$

$$\text{令 } g(x) = \frac{\cos x}{e^x} \left(0 < x < \frac{\pi}{2} \right),$$

方程 $f'(x) = 0$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上有实根,

即函数 $y = a$ 与函数 $g(x) = \frac{\cos x}{e^x}$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上有交点.

$$\text{由 } g(x) = \frac{\cos x}{e^x}, \text{ 得 } g'(x) = \frac{-\sin x - \cos x}{e^x} = \frac{-\sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})}{e^x},$$

显然, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递减,

$$\text{则 } 0 = g(\frac{\pi}{2}) < g(x) < g(0) = 1,$$

所以, 当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $y=a$ 与 $g(x)$ 有交点, a 的取值范围是 $(0, 1]$.

即当 $a \in (0, 1)$ 时, 存在唯一实数 $x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$, 使得 $f'(x_0) = 0$ 成立,

当 $x \in (0, x_0)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 为 $(0, x_0)$ 上的减函数;

当 $x \in (x_0, \frac{\pi}{2})$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 为 $(x_0, \frac{\pi}{2})$ 上的增函数,

所以 $x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ 为函数 $f(x)$ 的极小值点.

综上知, 函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上存在极值, a 的取值范围是 $(0, 1]$.

【解析】 本题考查利用导数研究函数的单调性, 极值, 最值, 以及不等式恒成立问题, 考查分类讨论思想, 属于难题.

(1) 当 $a=1$ 时, $f(x) = e^x - \sin x - 1$, 求导, 求出函数的最小值, 进而即可证明;

(2) 若函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上存在极值, 则 $f'(x) = ae^x - \cos x$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上存在零点.

法一: 通过讨论 a 的范围, 对函数的零点分析求解即可;

法二: 令 $g(x) = \frac{\cos x}{e^x} (0 < x < \frac{\pi}{2})$, 方程 $f'(x) = 0$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上有实根, 即函数 $y=a$ 与函数 $g(x) = \frac{\cos x}{e^x}$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上有交点, 讨论 $g(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上的交点情况即可求解.