

一、单项选择题

1. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \ln(2-x), & x \leq 1, \\ -x^2+1, & x > 1, \end{cases}$ 若 $|f(x)| - ax + a \geq 0$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是()

A. $[-\frac{1}{2}, 1]$ B. $[0, 1]$ C. $[1, +\infty)$ D. $[0, 2]$

2. 网络用语“车珠子”，通常是指将一块原料木头通过加工打磨，变成球状珠子的过程. 某同学有一圆锥状的木块，想把它“车成珠子”，经测量，该圆锥状木块的底面直径为 12 cm，体积为 $96\pi \text{ cm}^3$ ，假设条件理想，他能成功，则该珠子的体积最大值是()

A. $36\pi \text{ cm}^3$ B. $12\pi \text{ cm}^3$ C. $9\pi \text{ cm}^3$ D. $72\pi \text{ cm}^3$

3. 若过点 $(1, 2)$ 总可以作两条直线与圆 $x^2 + y^2 + kx + 2y + k^2 - 15 = 0$ 相切, 则实数 k 的取值范围是()

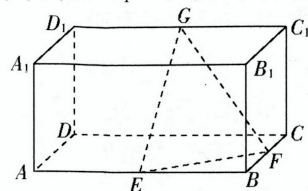
A. $k > 2$ B. $-3 < k < 2$ C. $k < -3$ 或 $k > 2$ D. 以上都不对

4. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x) = \begin{cases} x^2+2, & x \in [0, 1) \\ 2-x^2, & x \in [-1, 0) \end{cases}$, 且 $f(x+2) = f(x)$, 若方程 $f(x) - kx - 2 = 0$ 有三个不相等的实数根, 则实数 k 的取值范围是()

A. $(\frac{1}{3}, 1)$ B. $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{4})$
C. $(-1, -\frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, 1)$ D. $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}) \cup (\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$

5. 如图, 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AD = DD_1 = 1$, $AB = \sqrt{3}$, E, F, G 分别为 AB, BC, C_1D_1 的中点, 点 P 在平面 $ABCD$ 内. 若直线 $D_1P \parallel$ 平面 EFG , 则线段 D_1P 长度的最小值是()

A. $\frac{\sqrt{7}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$



二、多项选择题:

6. 关于函数 $f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$, 下列正确命题是()
- A. $y = f(x)$ 的最大值为 2
B. $y = f(x)$ 是以 π 为最小正周期的周期函数
C. $y = f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{24}, \frac{13\pi}{24}\right)$ 上单调递减
D. 将函数 $y = \sqrt{2}\cos 2x$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{24}$ 个单位长度后, 将与已知函数的图像重合
7. 已知圆 $C_1: (x+6)^2 + (y-5)^2 = 4$, 圆 $C_2: (x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$, M, N 分别为圆 C_1 和 C_2 上的动点, P 为 x 轴上的动点, 则 $|PM| + |PN|$ 的值可以是()
- A. 6 B. 7 C. 10 D. 15
8. 已知直线 $x\sin\alpha + y\cos\alpha + 1 = 0 (\alpha \in \mathbf{R})$, 下列四个命题中正确的有 ()
- A. 直线的倾斜角是 $\pi - \alpha$
B. 无论 α 如何变化, 直线不过原点
C. 无论 α 如何变化, 直线总和一个定圆相切
D. 当直线和两坐标轴都相交时, 它和坐标轴围成的三角形的面积不小于 1
9. 设 M, N 是抛物线 $y^2 = x$ 上的两个不同的点, O 是坐标原点. 若直线 OM 与 ON 的斜率之积为 $-\frac{1}{2}$, 则 ()
- A. $|OM| + |ON| > 4\sqrt{2}$ B. 以 MN 为直径的圆的面积大于 2π
C. 直线 MN 过抛物线 $y^2 = x$ 的焦点 D. 点 O 到直线 MN 的距离不大于 2

三、填空题:

10. 已知函数 $f(x) = \frac{x^2 + ax + 11}{x + 1}$ ($a \in \mathbf{R}$), 若对于任意的 $x \in \mathbf{N}^*$, $f(x) \geq 3$ 恒成立, 则 a 的取值范围是

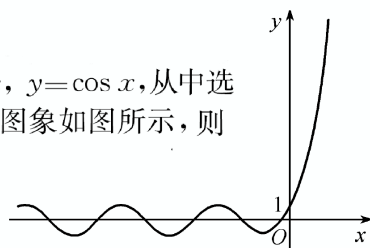
_____.

11. 已知 $f(x) = \log_2(4^x + 1) - x$, 则使得 $f(2x - 1) + 1 < \log_2 5$ 成立的 x 的取值范围是_____.

12. 已知抛物线 $y^2 = 9x$ 的焦点为 F , 其准线与 x 轴相交于点 M , N 为抛物线上一点, 且满足 $\sqrt{6}|NF| = 2|MN|$, 则点 F 到直线 MN 的距离为_____.

13. 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 直线 MN 过焦点 F , 且与抛物线 C 交于 M, N 两点. P 为抛物线 C 准线 l 上一点, 且 $PF \perp MN$, 连接 PM 交 y 轴于点 Q , 过点 Q 作 $QD \perp MF$ 于点 D . 若 $|MD| = 2|FN|$, 则 $|MF| =$ _____.

14. 已知下列六个函数: $y = x, y = x^2, y = \ln x, y = 2^x, y = \sin x, y = \cos x$, 从中选出两个函数记为 $f(x)$ 和 $g(x)$, 若 $F(x) = f(x) + g(x)$ 的图象如图所示, 则 $F(x) =$ _____.



四、解答题：

15. 已知直线 $l: kx - y - 2k = 0$, 圆 $C: x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$.

(1) 求证：无论 k 取何值，直线 l 与圆 C 都有两个交点；

(2) 是否存在实数 k , 使以 l 被圆 C 截得的弦 AB 为直径的圆过点 C ? 若存在, 求出实数 k 的值; 若不存在, 请说明理由.

16. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, A_1, A_2 分别为椭圆 E 的左右顶点, B 为上顶点, $\triangle A_1BA_2$ 的面积为 2. 直线 l 过点 $D(1, 0)$ 且与椭圆 E 交于 P, Q 两点.

(1) 求椭圆 E 的标准方程;

(2) 求 $\triangle OPQ$ 面积的最大值;

(3) 设直线 A_1P 与直线 QA_2 交于点 N , 证明：点 N 在定直线上, 并写出该直线方程.

