

江苏省仪征中学 2020—2021 学年度第一学期高二数学

周末练习 (4)

一、单项选择题 (本大题共 8 小题, 共 40.0 分)

1. 设 $a, b, c \in \mathbb{R}$, 且 $a > b$, 则 ()
- A. $ac > bc$ B. $a - c < b - c$ C. $a^2 > b^2$ D. $a^3 > b^3$
2. 不等式 $x(4-x) < 3$ 的解集为 ()
- A. $\{x|x < 1 \text{ 或 } x > 3\}$ B. $\{x|x < 0 \text{ 或 } x > 4\}$ C. $\{x|1 < x < 3\}$ D. $\{x|0 < x < 4\}$
3. 设命题 $p: \frac{x-1}{x+2} \geq 0$, 命题 $q: (x-1)(x+2) \geq 0$, 则命题 p 是命题 q 的 ()
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
- C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
4. 若关于 x 的不等式 $x^2 + 2ax + 1 \geq 0$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒成立, 则实数 a 的取值范围为 ()
- A. $(0, +\infty)$ B. $[0, +\infty)$ C. $[-1, 1]$ D. $[-1, +\infty)$
5. 已知正数 x, y 满足 $x+2y-xy=0$, 则 $x+2y$ 的最小值为 ()
- A. 8 B. 4 C. 2 D. 0
6. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q \neq 1$, 且 $a_3 + a_5 = 8$, $a_2 a_6 = 16$, 则 $\{a_n\}$ 的前 2020 项的和为 ()
- A. 8064 B. 4 C. -4 D. 0
7. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} - a_n = 2$, $a_1 = -5$, 则 $|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_6| =$ ().
- A. 9 B. 15 C. 18 D. 30
8. 正项等比数列 $\{a_n\}$ 中, 存在两项 a_m, a_n 使得 $\sqrt{a_m \cdot a_n} = 2a_1$, 且 $a_6 = a_5 + 2a_4$, 则 $\frac{1}{m} + \frac{4}{n}$ 的最小值是 ()
- A. $\frac{3}{2}$ B. 2 C. $\frac{7}{3}$ D. $\frac{9}{4}$

二、不定项选择题 (本大题共 4 小题, 共 20.0 分)

9. 在下列函数中, 最小值是 2 的函数有 ()
- A. $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ B. $f(x) = \cos x + \frac{1}{\cos x} \left(0 < x < \frac{\pi}{2} \right)$
- C. $f(x) = \frac{x^2 + 4}{\sqrt{x^2 + 3}}$ D. $f(x) = 3^x + \frac{4}{3^x} - 2$
10. 下列各结论中正确的是 ()
- A. “ $xy > 0$ ” 是 “ $\frac{x}{y} > 0$ ” 的充要条件
- B. 设 $x, y \in \mathbb{R}$, 则 “ $x \geq 2$ 且 $y \geq 2$ ” 是 “ $x^2 + y^2 \geq 4$ ” 的必要而不充分条件

C. 命题“ $\forall x > 1, x^2 - x > 0$ ”的否定是“ $\exists x_0 \leq 1, x_0^2 - x_0 \leq 0$ ”

D. “二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象过点 $(1,0)$ ”是“ $a + b + c = 0$ ”的充要条件

11. 设数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, S_n 是其前 n 项和, $a_1 > 0$,且 $S_6 = S_9$,则()

A. $d < 0$,

B. $a_8 = 0$,

C. $S_5 > S_6$,

D. S_7, S_8 为 S_n 的最大值

12. 在悠久灿烂的中国古代文化中,数学文化是其中的一朵绚丽的奇葩.《张丘建算经》是我国古代有标志性的内容丰富的众多数学名著之一,大约创作于公元五世纪.书中有如下问题:“今有女善织,日益功疾,初日织五尺,今一月织九匹三丈,问日益几何?”.其大意为:“有一女子擅长织布,织布的速度一天比一天快,从第二天起,每天比前一天多织相同数量的布,第一天织5尺,一个月共织了九匹三丈,问从第二天起,每天比前一天多织多少尺布?”.已知1匹=4丈,1丈=10尺,若这一个月有30天,记该女子这一个月中的第 n 天所织布的尺数为 a_n , $b_n = 2^{a_n}$,对于数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$,下列选项中正确的为()

A. $b_{10} = 8b_5$

B. $\{b_n\}$ 是等比数列

C. $a_1 b_{30} = 105$

D. $\frac{a_3 + a_5 + a_7}{a_2 + a_4 + a_6} = \frac{209}{193}$

三、填空题(本大题共4小题,共20.0分)

13. 不等式 $\frac{2x-1}{x+2} \leq 3$ 的解集为_____

14. 若命题“ $\exists x \in R, x^2 - mx - m < 0$ ”是假命题,则实数 m 的取值范围是_____

15. 设等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + a_3 = 10, a_2 + a_4 = 5$,则 $a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$ 的最大值为_____

16. 设实数 x, y 满足 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$,则 $3x^2 - 2xy$ 的最小值是_____

四、解答题(本大题共6小题,共70.0分)

17. 设 p :实数 x 满足 $x^2 - 2ax - 3a^2 < 0(a > 0)$, $q: 2 \leq x < 4$.

(1)若 $a = 1$,且 p, q 都为真命题,求 x 的取值范围;

(2)若 q 是 p 的充分不必要条件,求实数 a 的取值范围.

18. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, 各项为正的等比数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $2a_1 = b_1 = 2$,

$$a_2 + a_8 = 10, \text{ ______}.$$

$$\text{在①}\lambda S_n = b_n - 1(\lambda \in R); \quad \text{②}a_4 = S_3 - 2S_2 + S_1; \quad \text{③}b_n = 2^{\lambda a_n}(\lambda \in R).$$

这三个条件中任选其中一个, 补充在上面的横线上, 并完成下面问题的解答

(如果选择多个条件解答, 则按选择第一个解答计分).

(1)求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2)求数列 $\{a_n + b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. 已知不等式 $x^2 - 5ax + b > 0$ 的解集为 $\{x | x > 4 \text{ 或 } x < 1\}$.

(1) 求实数 a, b 的值;

(2) 若 $0 < x < 1$, $f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{1-x}$, 求 $f(x)$ 的最小值.

20. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, 公差不为零其前 n 项和为 S_n .若 a_2, a_4, a_7 成等比数列, $S_3 = 12$.

(1)求 a_n 及 S_n ;

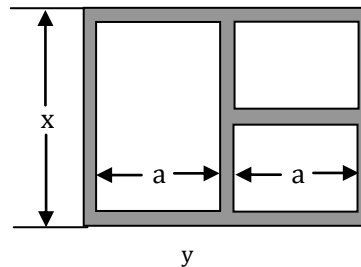
(2)已知数列 $\{b_n\}$ 满足 $\frac{1}{b_{n+1}} - \frac{1}{b_n} = a_n, n \in N_+, b_1 = \frac{1}{3}$, T_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和,

求 T_n 的取值范围.

21. 某市近郊有一块 $400\text{ m} \times 400\text{ m}$ 正方形的荒地，准备在此荒地上建一个综合性休闲广场，需先建造一个总面积为 3000 m^2 的矩形场地(如下图) . 图中，阴影部分是宽度为 2 m 的通道，三个矩形区域将铺设塑胶地面作为运动场地（其中两个小矩形场地形状、大小相同），塑胶运动场地总面积为 $S\text{ m}^2$.

(1) 求 S 关于 x 的函数关系式，并给出定义域；

(2) 当 x 为何值时 S 取得最大值，并求最大值.



22. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_n = 2a_n - \frac{1}{2} (n \in \mathbb{N}^*)$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = 1$,

点 $P(b_n, b_{n+1})$ 在直线 $x - y + 2 = 0$ 上.

(1) 求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式 a_n , b_n ;

(2) 令 $c_n = a_n \cdot b_n$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n ;

(3) 若 $\lambda > 0$, 对所有的正整数 n 都有 $\lambda^2 - (k+1)\lambda + 3 > \frac{b_n}{a_{2n}}$ 成立, 求 k 的取值范围.

周末练习(4) 答案

一、单项选择题(本大题共8小题,共40.0分)

1-4. DAAD 6-8. ADCD

二、不定项选择题(本大题共4小题,共20.0分)

9. AD 10. AD 11. ABD 12. BD

12 解: 设该妇子织布每天增加 d 尺, $a_1 = 5$,

由题意可得 $30a_1 + \frac{30 \times 29d}{2} = 390$, 解得 $d = \frac{16}{29}$,

$$\therefore a_n = 5 + (n-1) \times \frac{16}{29} = \frac{16n+129}{29},$$

$\because b_n = 2^{a_n}$, $\therefore \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2^{a_{n+1}}}{2^{a_n}} = 2^d$ (非零常数), 则数列 $\{b_n\}$ 是等比数列, 故 B 选项正确;

$$\frac{b_{10}}{b_5} = \frac{2^{a_{10}}}{2^{a_5}} = 2^{a_{10}-a_5} = 2^{5d} \neq 8, \text{ 故 A 选项错误;}$$

$$a_1 b_{30} = 5 \times 2^{a_{30}} = 5 \times 2^{21} \neq 105, \text{ 故 C 错误;}$$

$$\frac{a_3+a_5+a_7}{a_2+a_4+a_6} = \frac{3a_5}{3a_4} = \frac{a_5}{a_4} = \frac{209}{193}, \text{ 故 D 选项正确. 故选 BD.}$$

三、填空题(本大题共4小题,共20.0分)

13. $(-\infty, -7] \cup (-2, +\infty)$ 14. $[-4, 0]$ 15. 64 16. $4\sqrt{2}+6$

$$16. \text{解法一: } \frac{x^2}{4} - y^2 = \left(\frac{x}{2} + y\right)\left(\frac{x}{2} - y\right) = 1, \text{ 令 } \begin{cases} \frac{x}{2} + y = m \\ \frac{x}{2} - y = n \end{cases}, \text{ 则 } \begin{cases} x = m+n \\ y = \frac{m-n}{2} \end{cases} \text{ 且 } mn=1$$

$$3x^2 - 2xy = 3(m+n)^2 - 2(m+n)\left(\frac{m-n}{2}\right) = 2m^2 + 4n^2 + 6mn \geq 2\sqrt{8m^2n^2} + 6mn = 4\sqrt{2} + 6$$

$$\text{解法二: } 3x^2 - 2xy = \frac{3x^2 - 2xy}{\frac{x^2}{4} - y^2} = \frac{3\frac{x^2}{y^2} - 2\frac{x}{y}}{\frac{1}{4}\frac{x^2}{y^2} - 1} = \frac{12t^2 - 8t}{t^2 - 4} = 12 - \frac{8(6-t)}{t^2 - 4}$$

四、解答题(本大题共6小题,共70.0分)

17. 解: (1) 若 $a = 1$, 则 $x^2 - 2ax - 3a^2 < 0$ 可化为 $x^2 - 2x - 3 < 0$, 得 $-1 < x < 3$.

若 q 为真命题, 则 $2 \leq x < 4$. $\because p, q$ 都为真命题, $\therefore x$ 的取值范围是 $\{x | 2 \leq x < 3\}$.

(2) 由 $x^2 - 2ax - 3a^2 < 0 (a > 0)$, 得 $-a < x < 3a$,

$\because q$ 是 p 的充分不必要条件, $\therefore \{x|2 \leq x < 4\} \subsetneq \{x|-a < x < 3a\}$,

$$\text{则} \begin{cases} -a < 2 \\ a > 0 \\ 3a \geq 4 \end{cases}, \text{得} a \geq \frac{4}{3}, \text{解得} a \geq \frac{4}{3}, \text{故实数 } a \text{ 的取值范围为} [\frac{4}{3}, +\infty).$$

18. 解: 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

$$\because 2a_1 = 2, a_2 + a_8 = 10, \therefore 2a_1 + 8d = 10, \therefore a_1 = 1, d = 1,$$

$$\therefore a_n = 1 + (n-1) \times 1 = n,$$

选①:

$$(1) \text{由 } b_1 = 2, \lambda S_n = b_n - 1,$$

$$\text{当 } n = 1 \text{ 时, 有 } \lambda S_1 = \lambda b_1 = b_1 - 1, \text{ 即 } 2\lambda = 2 - 1, \text{ 解得: } \lambda = \frac{1}{2},$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } b_n = S_n - S_{n-1} = 2(b_n - 1) - 2(b_{n-1} - 1), \text{ 即 } b_n = 2b_{n-1},$$

$$\text{所以 } \{b_n\} \text{ 是一个以 } 2 \text{ 为首项, } 2 \text{ 为公比的等比数列, } \therefore b_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n;$$

$$(2) \text{由 (1) 知: } a_n + b_n = n + 2^n,$$

$$\therefore T_n = (1+2+3+\dots+n) + (2+2^2+2^3+\dots+2^n)$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(1-2^n)}{1-2} = 2^{n+1} - 2 + \frac{n(n+1)}{2}.$$

选②:

$$(1) \text{设等比数列 } \{b_n\} \text{ 的公比为 } q, \text{ 则 } q > 0,$$

$$\text{依题意得 } a_4 = (S_3 - S_2) - (S_2 - S_1) = b_3 - b_2 = b_1(q^2 - q) = 4,$$

$$\because b_1 = 2, \therefore 2(q^2 - q) = 4, \text{ 解得 } q=2 \text{ 或 } q=-1(\text{舍}), \therefore b_n = 2^n;$$

$$(2) \text{由 (1) 知: } a_n + b_n = n + 2^n,$$

$$\therefore T_n = (1+2+3+\dots+n) + (2+2^2+2^3+\dots+2^n)$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(1-2^n)}{1-2} = 2^{n+1} - 2 + \frac{n(n+1)}{2}.$$

选③:

$$(1) \because b_n = 2^{\lambda a_n} (\lambda \in R), 2a_1 = b_1 = 2,$$

$$\text{令 } n = 1, \text{ 得: } b_1 = 2^{\lambda a_1}, \text{ 即 } 2 = 2^\lambda, \therefore \lambda = 1, \therefore b_n = 2^{a_n}, \because a_n = n, \therefore b_n = 2^n;$$

$$(2) \text{由 (1) 知: } a_n + b_n = n + 2^n,$$

$$\therefore T_n = (1+2+3+\dots+n) + (2+2^2+2^3+\dots+2^n)$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(1-2^n)}{1-2} = 2^{n+1} - 2 + \frac{n(n+1)}{2}.$$

19. 解: (1) 根据题意, 不等式 $x^2 - 5ax + b > 0$ 的解集为 $\{x | x > 4 \text{ 或 } x < 1\}$,

则方程 $x^2 - 5ax + b = 0$ 的两个根是 1 和 4, 则有 $5a = 1 + 4$, $b = 1 \times 4$, 即 $a = 1$, $b = 4$;

$$(2) \text{ 由 (1) 知 } f(x) = \frac{1}{x} + \frac{4}{1-x},$$

因为 $0 < x < 1$, 所以 $0 < 1-x < 1$, 所以 $\frac{1}{x} > 0, \frac{4}{1-x} > 0$,

$$\text{所以 } f(x) = \frac{1}{x} + \frac{4}{1-x} = \left(\frac{1}{x} + \frac{4}{1-x}\right)[x + (1-x)] = 5 + \frac{1-x}{x} + \frac{4x}{1-x} \geq 5 + 2\sqrt{\frac{1-x}{x} \cdot \frac{4x}{1-x}} = 9,$$

当且仅当 $\frac{1-x}{x} = \frac{4x}{1-x}$, 即 $x = \frac{1}{3}$ 时, 等号成立. 所以 $f(x)$ 的最小值为 9.

$$20. \text{ 解: (1) } \begin{cases} (a_1 + 3d)^2 = (a_1 + d)(a_1 + 6d) \\ 3a_1 + 3d = 12 \end{cases}$$

$$\text{解得 } d = 0 (\text{舍}) \text{ 或 } d = 1 \quad a_n = n + 2, S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{1} = \frac{n(n+5)}{2},$$

$$(2) \text{ 由 } \frac{1}{b_{n+1}} - \frac{1}{b_n} = a_n \text{ 得}$$

$$n \geq 2 \text{ 时, } \frac{1}{b_n} =$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n-1}}\right) + \left(\frac{1}{b_{n-1}} - \frac{1}{b_{n-2}}\right) + \left(\frac{1}{b_{n-2}} - \frac{1}{b_{n-3}}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{b_2} - \frac{1}{b_1}\right) + \frac{1}{b_1}, \\ & = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + \cdots + a_1 + 3 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}, \end{aligned}$$

当 $n = 1$ 时上式仍成立

$$\begin{aligned} \therefore b_n &= \frac{2}{(n+1)(n+2)} = 2\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right), \\ \therefore T_n &= 2\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)\right] \\ &= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right) = 1 - \frac{2}{n+2}, \end{aligned}$$

$\therefore$ 函数 $T_n = 1 - \frac{2}{n+2}$ 在 $[1, +\infty)$ 单调递增.

$$\therefore T_n \in \left[\frac{1}{3}, 1\right).$$

21. 解 (1) 设矩形场地的另一条边的长为 y , 则 $xy = 3000$

$$\text{即 } y = \frac{3000}{x}, \text{ 且 } 7.5 < x < 400.$$

$$S = (x-4)a + (x-6)a = (2x-10)a. \text{ 因为 } 2a + 6 = y, \text{ 所以 } a = \frac{y}{2} - 3 = \frac{1500}{x} - 3,$$

$$\text{所以 } S = (2x-10) \cdot \left(\frac{1500}{x} - 3\right) = 3030 - \left(\frac{15000}{x} + 6x\right), \text{ 其定义域是 } (7.5, 400).$$

$$(2) S = 3030 - \left(\frac{15000}{x} + 6x\right) \leq 3030 - 2\sqrt{6x \cdot \frac{15000}{x}} = 3030 - 2 \times 300 = 2430.$$

当且仅当 $\frac{15\,000}{x} = 6x$, 即 $x = 50 \in (7.5, 400)$ 时, 上述不等式等号成立,

此时 $x = 50$, $S_{\max} = 2430(\text{m}^2)$.

答: 当 $x = 50\text{m}$ 时, S 取得最大值, 其最大值为 $2\,430\text{m}^2$.

22. 解: (1) $\because S_n = 2a_n - \frac{1}{2}$, $\therefore S_1 = 2a_1 - \frac{1}{2}$, 即 $a_1 = \frac{1}{2}$,

当 $n \geq 2$ 时, $S_{n-1} = 2a_{n-1} - \frac{1}{2}$, $a_n = S_n - S_{n-1} = 2a_n - 2a_{n-1}$,

$\therefore a_n = 2a_{n-1} (n \geq 2, n \in N^*)$,

$\therefore \{a_n\}$ 是首项为 $\frac{1}{2}$, 公比为 2 的等比数列, 因此 $a_n = 2^{n-2}$, $n \in N^*$,

因为 $P(b_n, b_{n+1})$ 在直线 $x - y + 2 = 0$ 上, 所以 $b_n - b_{n+1} + 2 = 0$, 而 $b_1 = 1$,

所以 $\{b_n\}$ 是首项为 1, 公差为 2 的等差数列, 因此 $b_n = 2n - 1$.

(2) $\because c_n = a_n \cdot b_n = (2n - 1) \cdot 2^{n-2} (n \in N^*)$,

$\therefore T_n = \frac{1}{2} \times 1 + 1 \times 3 + 2 \times 5 + \cdots + 2^{n-2} \cdot (2n - 1)$ ①,

因此 $2T_n = 1 \times 1 + 2 \times 3 + 2^2 \times 5 + \cdots + 2^{n-2} \cdot (2n - 3) + 2^{n-1} \cdot (2n - 1)$ ②,

① - ② 得: $-T_n = \frac{1}{2} + 2(1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-2}) - (2n - 1) \cdot 2^{n-1} = \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1 - 2^{n-1}}{1 - 2} -$

$(2n - 1) \cdot 2^{n-1} = -\frac{3}{2} + (3 - 2n) \cdot 2^{n-1}$,

$\therefore T_n = \frac{3}{2} + (2n - 3) \cdot 2^{n-1}$.

(3) 由 (1) 知 $n \geq 1$, $\frac{b_n}{a_{2n}} = 2^{2-2n} \cdot (2n - 1)$.

$\because \frac{b_{n+1}}{a_{2(n+1)}} - \frac{b_n}{a_{2n}} = 2^{-2n} \cdot (2n + 1) - 2^{2-2n} \cdot (2n - 1) = 2^{-2n} \cdot (5 - 6n) < 0 (n \geq 1)$,

$\therefore$ 数列 $\left\{\frac{b_n}{a_{2n}}\right\}$ 为单调递减数列.

$\therefore$ 当 $n \geq 1$ 时, $\frac{b_n}{a_{2n}} \leq \frac{b_1}{a_2} = 1$, 即 $\frac{b_n}{a_{2n}}$ 的最大值为 1.

由 $\lambda^2 - (k + 1)\lambda + 3 > 1$ 可得 $(k + 1)\lambda < \lambda^2 + 2$, $k + 1 < \lambda + \frac{2}{\lambda}$.

而当 $\lambda > 0$ 时, $\lambda + \frac{2}{\lambda} \geq 2\sqrt{2}$ 当且仅当 $\lambda = \sqrt{2}$ 时取等号.

$\therefore k + 1 < 2\sqrt{2}$, 即 $k \in (-\infty, 2\sqrt{2} - 1)$.