

管窥“以形助数”的十个视角

李红春

(武汉市黄陂区第一中学盘龙校区 430312)

数与形是数学中两个最古老也是最基本的问题,它们在一定的条件下可以相互转化.数形结合的思想是高中数学中极为重要的思想,它分为“以数解形”和“以形助数”两个方面.所谓“以形助数”就是把数量关系的问题转化为图形的性质问题来讨论,即把抽象的“数”结构与形象的“形”结构联系起来,化抽象为直观,通过对图形的研究,挖掘问题的隐含条件,诱发解题线索,使求解过程变得简捷直观.本文结合实例谈谈“以形助数”解决代数问题的10个视角.

视角1:利用“直线的斜率”

例1 已知 $f(x) = 2mx + m^2 + 2, m \neq 0$, $m \in \mathbb{R}, |x_1| + |x_2| = 1$, 求 $\frac{f(x_1)}{f(x_2)}$ 的取值范围.

解 由题意

$$\begin{aligned} \frac{f(x_1)}{f(x_2)} &= \frac{2mx_1 + m^2 + 2}{2mx_2 + m^2 + 2} \\ &= \frac{x_1 + \frac{m}{2} + \frac{1}{m}}{x_2 + \frac{m}{2} + \frac{1}{m}}, \end{aligned}$$

问题等价于 $|x| + |y| = 1$ 上的动点 $P(x, y)$ 与 $y = x$ ($x \geq \sqrt{2}$ 或 $x \leq -\sqrt{2}$) 上的动点 M 连线斜率的取值范围,如图1,由 $P_1(0, 1), P_2(1, 0), M(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, 易知

$$k_{P_1M} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, k_{P_2M} = 2 + \sqrt{2},$$

结合图形可知

$$\frac{f(x_1)}{f(x_2)} \in \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 2 + \sqrt{2}\right].$$

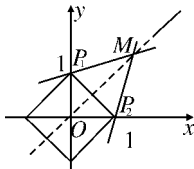


图1

点评 本题变量较多,从数的角度分析比较模糊,通过构造斜率,从形的角度分析,显得简洁,轻松!

视角2:利用“直线的截距”

例2 (2012年湖北省数学联赛试题)求函数 $y = x^2 + x\sqrt{x^2 - 1}$ 的值域.

解 令 $m = x^2, n = x\sqrt{x^2 - 1}$, 则 $n^2 = m(m - 1)$,

其中 $m \geq 0$, 即

$$4\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 - 4n^2 = 1, m \geq 0,$$

又 $y = m + n$, 问题转化为以双曲线右支上的点为可行域, $y = m + n$ 为目标函数的线性规划问题,结合图2分析可知:当直线 $n = -m + y$ 与渐近线 $n = -m + \frac{1}{2}$ 重合时, $y =$

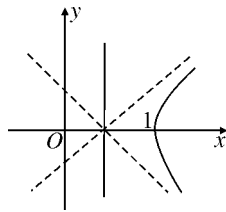


图2

$\frac{1}{2}$. 当直线沿横轴方向向右无限平移时, $y \rightarrow +\infty$, 故 $y > \frac{1}{2}$.

点评 通过换元,将函数值域问题转化为“截距型”的线性规划问题,直观、清晰.

视角3:利用“点到直线的距离”

例3 证明:

$$\frac{(x^2 + y^2 + xz)^2 + (x^2 + y^2 + yz)^2}{x^2 + y^2}$$

$$\geq (x + y + z)^2.$$

证明 原式等价于

$$\sqrt{\left(1+\frac{xz}{x^2+y^2}\right)^2+\left(1+\frac{yz}{x^2+y^2}\right)^2} \geq \frac{|x+y+z|}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

设点 $A(1,1), B\left(-\frac{xz}{x^2+y^2}, -\frac{yz}{x^2+y^2}\right)$,

直线 $l: xm+yn+z=0$ (m, n 为变量), 易知点 B 在 l 上, 点 A 到 l 的距离为

$$d = \frac{|x+y+z|}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$|AB| = \sqrt{\left(1+\frac{xz}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(1+\frac{yz}{x^2+y^2}\right)^2},$$

显然 $|AB| \leq d$, 故原不等式成立.

点评 本题通常采用作差法或分析法, 解答起来较为繁琐, 通过联想“点到直线的距离”巧妙解答问题, 解答过程犹如神来之笔, 让人回味无穷!

视角4: 利用“两点间的距离”

例4 设 $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, 求证: $\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2-bc} \geq \sqrt{c^2+a^2} + \sqrt{3ac}$.

解 如图3, 在平面直角坐标系中 O 为坐标原点, 设 $M(a, b), N(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}c, \frac{1}{2}c)$, 则

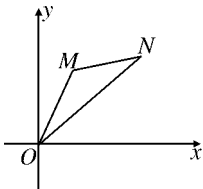


图3

$$|OM| = \sqrt{a^2+b^2},$$

$$|ON| = \sqrt{c^2+a^2+\sqrt{3}ac},$$

$$|MN| = \sqrt{b^2+c^2-bc},$$

由平面内两点间的距离最短, 故

$$|OM| + |MN| \geq |ON|,$$

即 $\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2-bc}$

$$\geq \sqrt{c^2+a^2} + \sqrt{3ac}.$$

点评 本题若按常规方法解答, 则需平方两次, 计算量颇大, 通过待证式的结构特征, 构造两点间的距离模型解题, 避免了繁琐的计算, 但本题的难点是 M, N 两点坐标的

选择使之满足待证式的条件.

视角5: 利用“两条平行线间的距离”

例5 已知 $m, n, a, b \in \mathbb{R}$, 且 $3m+4n=6, 3a+4b=-1$, 则 $(m+a)^2 + (n+b)^2$ 的最小值为_____.

解 由 $3m+4n=6$, 可联想点 $M(m, n)$ 在直线 $l_1: 3x+4y=6$ 上.

由 $3a+4b=-1$ 得

$$3 \cdot (-a) + 4 \cdot (-b) = 1,$$

可联想点 $N(-a, -b)$ 在直线 $l_2: 3x+4y=1$ 上. 于是

$$(m+a)^2 + (n+b)^2 = |MN|^2,$$

因 $l_1 \parallel l_2$, 故 l_1 与 l_2 之间的距离为

$$d = \frac{|-6+1|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 1,$$

由图4分析可知平行直线上任意两点间的距离不小于这两条平行直线间的距离, 故 $|MN| \geq d = 1$, 故

$$(m+a)^2 + (n+b)^2 \geq 1.$$

点评 本题的解法比较多, 但从形的角度来诠释问题显得别具一格. 对已知条件 $ab+cd=m$, 从形的角度分析可视为点 (a, c) 在直线 $bx+dy=m$ 上, 或点 (a, b) 在直线 $bx+cy=m$ 上.

视角6: 利用“直线与圆的位置关系”

例6 已知 $a, b, c \in \mathbb{R}$ 且 $a+b+c=1, a^2+b^2+c^2=\frac{1}{2}$, 求证: $0 \leq a, b, c \leq \frac{2}{3}$.

证明 设 $P(a, b)$, 则由题意知, 点 P 是直线 $x+y=1-c$ 与圆 $x^2+y^2=\frac{1}{2}-c^2$ 的公共点, 于是圆心 $(0, 0)$ 到直线 $x+y=1-c$ 的距离不大于该圆的半径, 即

$$\frac{|1-c|}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{\frac{1}{2}-c^2},$$

解之得

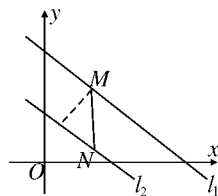


图4

$$0 \leq c \leq \frac{2}{3}.$$

同理有

$$0 \leq a \leq \frac{2}{3}, 0 \leq b \leq \frac{2}{3}.$$

故原题得证.

点评 将题干中的条件分别看为关于 a, b 的二元一次方程和二元二次方程, 进而联想到直线和圆, 再由直线和圆有交点得出圆心到直线的距离不大于半径, 构造出不等关系.

视角 7: 利用“单位圆和三角函数线”

例 7 若 $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, 求证: $\beta - \sin \beta > \alpha - \sin \alpha$.

证明 如图 5, 在单位圆中, A 为角 α 的终边与单位圆交点, B 为角 β 终边与单位圆交点, 且

$$0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2},$$

过 A 作 $AM_1 \perp x$ 轴于 M_1 , 过 B 作 $BM_2 \perp x$ 轴

于 M_2 , 过 A 作 y 轴垂线交 BM_2 于 N . 则

$$\sin \beta = M_2B, \sin \alpha = M_1A,$$

$$\sin \beta - \sin \alpha = NB,$$

$|\beta - \alpha|$ 的大小为弧 AB 的长, 连接 AB , 在 $\text{Rt} \triangle BNA$ 中 $|AB| > |NB|$, 因为弧 AB 的长大于线段 AB , 所以弧 AB 的长大于线段 NB , 即

$$|\beta - \alpha| > |\sin \beta - \sin \alpha|.$$

又因为

$$\beta > \alpha, \sin \beta > \sin \alpha,$$

所以

$$\beta - \alpha > \sin \beta - \sin \alpha,$$

$$\beta - \sin \beta > \alpha - \sin \alpha.$$

点评 三角函数线是三角函数的几何表示, 借助图形问题解决起来极为直观!

视角 8: 利用向量

例 8 若 $x^2 + 2xy - y^2 = 7 (x, y \in \mathbf{R})$, 求 $x^2 + y^2$ 的最小值.

解 由已知得

$$x^2 - 2xy - y^2$$

$$= x(x+y) + y(x-y) = 7,$$

设 $a = (x, y), b = (x+y, x-y)$,

则 $a \cdot b = x(x+y) + y(x-y) = 7$,

而 $|a| \cdot |b|$

$$= \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x+y)^2 + (x-y)^2}$$

$$= \sqrt{2}(x^2 + y^2),$$

由 $a \cdot b \leq |a| \cdot |b|$ 得

$$7 \leq \sqrt{2}(x^2 + y^2),$$

即 $x^2 + y^2 \geq \frac{7\sqrt{2}}{2},$

当且仅当 $\frac{x}{x+y} = \frac{y}{x-y}$, 即 $xy = \frac{7}{4}$ 时取等号.

点评 $a \cdot b$ 的几何意义是 b 的模与 a 在 b 方向上投影的积, 显然 $a \cdot b \leq |a| \cdot |b|$. 向量是数与形的结合, 根据题目的特点构造向量, 再根据不等关系“ $a \cdot b \leq |a| \cdot |b|$ ”来解题, 解答显得灵活巧妙、简捷.

视角 9: 利用“二次曲线的定义”

例 9 解方程

$$\sqrt{x^2 - 10x + 29} - \sqrt{x^2 + 10x + 29} = 8.$$

解 原方程可变形为

$$\sqrt{(x-5)^2 + 4} - \sqrt{(x+5)^2 + 4} = 8,$$

令 $y^2 = 4$, 则原方程转化为方程组

$$\begin{cases} \sqrt{(x-5)^2 + y^2} - \sqrt{(x+5)^2 + y^2} = 8, \\ y^2 = 4, \end{cases}$$

由双曲线的定义知

$$\sqrt{(x-5)^2 + y^2} - \sqrt{(x+5)^2 + y^2} = 8$$

表示焦点为 $(5, 0)$ 和 $(-5, 0)$, 实轴长为 8 的双曲线的左支, 故化简应为

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 (x < 0),$$

将其与 $y^2 = 4$ 联立解得

$$x = -\frac{4\sqrt{13}}{3}.$$

点评 直接求解,计算量之大让人望而却步,将原式进行变形,令 $y^2=4$ 后,由已知条件的结构特征联想到双曲线的定义如同自然天成,好似“春雨断桥人不渡,小舟撑出绿阴来”!形如 $\sqrt{(x-a)^2+b} \pm \sqrt{(x+a)^2+b} = c (b>0)$ 含有两个二次根式的和或差的无理方程通常可以借助椭圆或双曲线的定义来化简,值得关注.

视角 10:利用“正余弦定理”

例 10 求函数 $f(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{36-x^2} + \sqrt{64-x^2})x (0 < x < 6)$ 的最大值.

解 如图 6, AM 为 $\triangle ABC$ 边上的高, $AB=6$, $AC=8$, 设 $AM=x$, 则

$$CM = \sqrt{64-x^2},$$

$$BM = \sqrt{36-x^2},$$

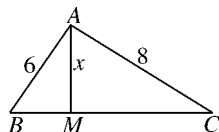


图 6

可知

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}(\sqrt{36-x^2} + \sqrt{64-x^2})x$$

$$= \frac{1}{2} \times 6 \times 8 \times \sin A$$

$$\leq 24.$$

例 11 已知 $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, 证明:

$$\begin{aligned} & \sqrt{a^2+b^2+ab} + \sqrt{b^2+c^2+bc} \\ & + \sqrt{c^2+a^2+ca} \\ & \geq \sqrt{3}(a+b+c). \end{aligned}$$

解 如图 7, 设 O 为 $\triangle ABC$ 内一点, 且 $OA=a$, $OB=b$, $OC=c$,

$$\begin{aligned} \angle AOB &= \angle AOC \\ &= \angle BOC = 120^\circ, \end{aligned}$$

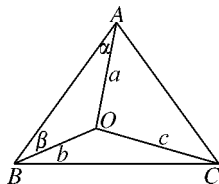


图 7

则由余弦定理

$$AB$$

$$= \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos 120^\circ}$$

$$= \sqrt{a^2+b^2+ab}.$$

同理

$$BC = \sqrt{b^2+c^2+bc},$$

$$CA = \sqrt{c^2+b^2+ca}.$$

在 $\triangle AOB$ 中, 设 $\angle OAB = \alpha$, $\angle OBA = \beta$,

依正弦定理有

$$\frac{AB}{\sin 120^\circ} = \frac{b}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin \beta},$$

由比例的性质则有

$$\frac{AB}{\sin 120^\circ} = \frac{a+b}{\sin \alpha + \sin \beta}$$

$$= \frac{a+b}{2\sin 30^\circ \cos \frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$\geq a+b,$$

则 $AB \geq \sin 120^\circ \cdot (a+b),$

即 $\sqrt{a^2+b^2+ab} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b).$

同理

$$\sqrt{b^2+c^2+bc} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(b+c),$$

$$\sqrt{c^2+a^2+ca} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(c+a),$$

3 个式子相加原不等式成立.

点评 例 10、例 11 分别利用正弦定理和余弦定理构图,使解决的问题直观、形象,关键在于把握式子的结构特征,将题设条件与定理的结构特征联系起来.

以上 10 个方面,充分展现出“以形助数”在数学解题应用中的广泛性与灵活性.将数量关系通过联想与构造转化为图形性质问题解决,能使抽象变为直观,让隐含得以显露.在平常的学习中多一些细致的观察与大胆的联想对培养自身的直觉思维能力,激发数学学习兴趣,增强思维的灵活性都大有裨益.

参考文献

- [1] 李红春. 善构造 巧解题[J]. 中学数学(上半月), 2013, (4).
- [2] 李红春. 平中见奇 凡而不俗[J]. 中学数学(上半月), 2012, (3).

(收稿日期: 2014-03-05)