目录

第 1 章　预备知识

第 1.1 节　集合与逻辑

第 1.2 节　不等式

1.2.1　斗转星移

若实数 x,y 满足 $\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=4$, 则 $x+y$ 的最小值是__________.

分析：条件比较复杂，而结论比较简单，条件不太好用.

想到换元令 $m=2x+\sqrt{4x^2+1}, n=y+\sqrt{y^2+1}$

答案：$\frac{\sqrt{14}}{4}$

1.2.2　盯住目标

1. ★★★☆☆　已知 $x > 0, y > 0$, 且 $xy = \dfrac{x+y}{x+4y}$, 则 $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ 的最小值为 ________.

第 2 章　函数

第 2.1 节　函数初步

第 2.2 节　导数初步

2.2.1　导数的几何意义

1. (2019 全国 III 理 6)　已知 $y=a\mathrm{e}^x+x\ln x$ 在点$(1,a\mathrm{e})$ 处的切线方程为$y=2x+b$　(　　)

A. $a=\mathrm{e},b=-1$　B. $a=\mathrm{e},b=1$　C. $a=\mathrm{e}^{-1},b=1$　D. $a=\mathrm{e}^{-1},b=-1$

2. 若过 $(0,-2)$ 的直线ℓ 与曲线$y=1+3\ln x$ 相切, 则ℓ 的方程为 ________.

3. 若直线 $y=kx-2$ 与曲线$y=1+3\ln x$ 相切, 则实数k 的值为　(　　)

A. 3　B. $\frac{1}{3}$　C. 2　D. $\frac{1}{2}$

4. (2016 全国 III 理 15)　已知 $f(x)$ 为偶函数, 当$x<0$ 时, $f(x)=\ln(-x)+3x$, 则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,-3)$ 处的切线方程是 ________.

5. (2017 江西理 11)　设函数 $f(x)$ 是$\mathbb{R}$ 上以5 为周期的可导偶函数, 则曲线$y=f(x)$ 在 $x=5$ 处的切线斜率为 (　　)

A. $-\frac{1}{5}$　B. 0　C. $\frac{1}{5}$　D. 5

6. (2019 全国 文 10) 曲线 $y=2\sin x+\cos x$ 在点$(\pi,-1)$ 处的切线方程为 ( )

A. $x-y-\pi-1=0$ B. $2x-y-2\pi-1=0$ C. $2x+y-2\pi+1=0$ D. $x+y-\pi+1=0$

7. 若直线 $y=x+1$ 与函数$f(x)=ax-\ln x$ 的图像相切, 则a 的值为 __________.

8. 若直线 $y=kx+b$ 是曲线$y=\ln x+2$ 的切线, 也是曲线$y=\ln(x+1)$ 的切线，则 $b=$ __________.

9. (2009 江西文 12) 若存在过点 $(1,0)$ 的直线与曲线$y=x^3$ 和$y=ax^2+\frac{15}{4}x-9$ 都相切,则 a 等于 __________.

10. (2016 四川文 10) 设直线 l_1、l_2 分别是函数 $f(x)=\begin{cases}-\ln x, & 0<x<1\\ \ln x, & x>1\end{cases}$ 图像上的点 P_1、P_2 处的切线，l_1 与 l_2 垂直相交于点 P，且 l_1、l_2 分别与 y 轴相交于点 A、B, 则 $\triangle PAB$ 的面积的取值范围是 ( )

A. $(0,1)$ B. $(0,2)$ C. $(0,+\infty)$ D. $(1,+\infty)$

11. 已知直线 l 既是曲线 $C_1:y=e^x$ 的切线，又是曲线 $C_2:y=\frac{1}{4}e^2x^2$ 的切线，则直线 l 在 x 轴上的截距为 ( )

A. 2 B. 1 C. e^2 D. $-e^2$

2.2.2 函数的单调性

导数之所以重要，是因为利用导数能够很简洁地刻画函数的单调性等性质.

【典型例题】

一、求具体函数的单调区间

1. (2019 全国 II 卷理 20) 已知函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{x+1}{x-1}$, 讨论$f(x)$ 的单调性.

2. (2016 全国 II 理 21) 已知函数 $f(x)=\dfrac{x-2}{x+2}e^x$, 讨论 $f(x)$ 的单调性.

二、函数单调性的讨论

3. (2009 北京理 18) 已知函数 $f(x)=x\mathrm{e}^{kx}(k\neq 0)$, 求函数 $f(x)$ 的单调区间.

4. (2016 山东文 20) 已知函数 $f(x)=x\ln x-ax^2+(2a-1)x, a\in\mathbb{R}$, 令 $g(x)=f'(x)$，求函数 $g(x)$ 的单调区间.

5. (2017 全国 I 卷文 21)　函数 $f(x)=e^x(e^x-a)-a^2x$, 讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

三、函数单调性的应用

6. 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, $f(-1)=2$, 对任意 $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)>2$, 则 $f(x)>2x+4$ 的解集为　(　　)

A. $(-1,1)$　　B. $(-1,+\infty)$　　C. $(-\infty,-1)$　　D. $(-\infty,-\infty)$

7. $f(x)$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的非负可导函数, 且满足 $xf'(x)-f(x)\leqslant 0$,
对任意正数 a,b, 若 $a<b$, 则必有　(　　)

A. $af(b)<bf(a)$　　B. $bf(a)<af(b)$　　C. $af(a)<bf(b)$　　D. $bf(b)<af(a)$

8. 设 a,b 是正实数, $\mathrm{e}<a<b$, 其中 e 是自然对数的底数,
求证 : $a^b>b^a$.

【巩固练习】

1. 若函数 $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$的单调递减区间为$(-1,3)$，则$b+c=$__________.

2. 解关于 x 的不等式：

① $ax>b, x\in[m,n]$

② $3x^2+ax+1>0$

③ $ax^2+3x+1>0$

④ $ax^2+3x+1>0, x\in[1,2]$

3. (2017 **课标** II **文** 21)　已知函数 $f(x)=(1-x^2)\,e^x$，讨论 $f(x)$ 的单调性.

4. (2015 江苏 19)　已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+b, a, b\in\mathbb{R}$, 讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

5. (2009 江苏 20)　已知函数 $f(x)=3x^2-2ax+a^2, x\in(a,+\infty)$, 求 $f(x)\geqslant 1$ 的解集.

6. (2018 全国 I 卷理 21)　已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}-x+a\ln x$, 讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

2.2.3 导数作图

2.2.4 三次函数

2.2.5 简单的恒成立

2.2.6 简单的任意与存在

第 2.3 节　函数与导数

第 2.4 节　数列

2.4.1　套中有套

1. ☆☆☆☆☆　正项等比数列 $\{a_n\}$ 中，存在两项 a_m、a_n 使得 $\sqrt{a_m a_n}=2a_1$，且 $a_6=a_5+2a_4$，则 $\dfrac{1}{m}+\dfrac{4}{n}$ 的最小值是　(　　)

A. $\dfrac{3}{2}$　　B. 2　　C. $\dfrac{7}{3}$　　D. $\dfrac{9}{4}$

2.4.2　正难则反

1. ☆☆☆☆☆　正整数列 $\{a_n\}$ 满足 $\dfrac{S_n}{a_n}=pn+q(p,q\text{为常数})$，其中 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和.

(I) 若 $p=1,q=0$，求证：$\{a_n\}$ 是等差数列；

(II) 若数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，求 p 的值；

(III) 证明：$a_{2020}=2020a_1$ 的充要条件是 $p=\dfrac{1}{2}$.

【数列的单调性】

1. ★☆☆☆☆ 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\frac{37}{4}-n$，

当 $a_1a_2a_3+a_2a_3a_4+a_3a_4a_5+\cdots+a_na_{n+1}a_{n+2}$ 取得最大值时,n 的值为 ( )

A. 7　　B. 8　　C. 9　　D. 10

【不定方程】

1. ★☆☆☆☆ 两个等差数列 200，203，206，... 和 50，54，58，... 都有 100 项，他们共同的项的个数是 __________.

2. ☆☆☆☆☆ 设集合 $M=\{a|a=\frac{x+y}{t},2^x+2^y=2^t,\text{其中}x,y,t,a\text{均为整数}\}$, 则集合 $M=$__________.

练0.1 (☆☆☆☆☆)

已知数列 $\{a_n\}$:$a_n=2^n$，试问数列中是否存在三项使它们可以构成等差数列.

练0.2 (☆☆☆☆☆)

已知数列 $\{a_n\}$:$a_n=\dfrac{n}{2^n}$，试问数列中是否存在 $m,k(l<m)$ 使 a_1,a_m,a_k 构成等差数列.

练0.3 (☆☆☆☆☆)

已知数列 $\{a_n\}$:$a_n=\sqrt{2}n+1$，试问数列中是否存在三项使它们可以构成等比数列.

3. ☆☆☆☆☆

(Ⅰ) 对于数列 $\{a_n\}$,$a_n=\frac{1}{2n+1}$，对于任意给定的正整数 $k,(k\geqslant 2)$ 是否存在正整数 $l,m(k<l<m)$, 使得 a_k,a_l,a_m 成等差数列，若存在，求出一组，若不存在，请说明理由.

(Ⅱ) 对于数列 $\{a_n\},a_n=\dfrac{n}{2^n}$, 是否存在正整数 $k,l,m,(2\leqslant k<l<m)$, 使得 a_k,a_l,a_m 成等差数列.

【求和问题】

1. ☆☆☆☆☆　求和

$$\Sigma_{n=1}^{2020}(-1)^n\frac{n^2+n+1}{n!}$$

第 3 章　几何与代数

第 3.1 节　三角与向量

3.1.1　两角和与差的正弦、余弦

练0.1 (★★☆☆☆)

求证：$\dfrac{\sin(2\alpha+\beta)}{\sin\alpha}-2\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}$.

练0.2 (★★☆☆☆)

已知：$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi,\sin\alpha=\dfrac{3}{5},\cos(\alpha-\beta)=-\frac{5}{13}$，求 $\sin\beta$ 的值.

练0.3 (★★☆☆☆)

已知 $\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{2},\sin(\alpha-\beta)=\dfrac{1}{3}$，求$\dfrac{\tan\alpha}{\tan\beta}$ 的值.

练0.4 (★★☆☆☆)

已知 $8\cos(2\alpha+\beta)+5\cos\beta=0$，求 $\tan(\alpha+\beta)\tan\alpha$ 的值.

练0.5 (★★☆☆☆)

已知 $0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{3}$，且$5\sqrt{3}\sin x+5\cos x=8$，求 $\tan\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$.

练0.6 (★★☆☆☆)

若 $\sin x-\sqrt{3}\cos x=\dfrac{4m-6}{4-m}$ 有意义，求m 的取值范围.

练0.7 (★★☆☆☆)

若 $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=0,\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=0$，求 $\cos(\alpha-\beta)$.

练0.8 (★★☆☆☆)

已知 $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\theta\right)+\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)=4$，且 $-\pi<\theta<-\frac{\pi}{2}$，求 $\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta-\cos^2\theta$.

练0.9 (★★☆☆☆)

已知 $\alpha,\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，且$\alpha+\beta\neq\dfrac{\pi}{2}$，角 α、β 满足条件：$sin\beta=2\sin\theta\cos\theta-\cos^2\theta$.
(1) 用 $\tan\alpha$ 表示 $\tan\beta$ (2) 求 $\tan\beta$ 的最大值.

练0.10 (★★☆☆☆)

已知表达式 $3\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x\cos x+4\cos^2 x+k$ 可化成 $\sin(2x+\varphi)$ 的形式，其中 $0<\varphi<\pi$，求 k 和 φ 的值.

3.1.2 两角和与差的正切

练0.1 (★★☆☆☆)

已知 $\alpha,\beta,\gamma\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，且 $\tan\alpha=2,\tan\beta=\frac{2}{3},\tan\gamma=\frac{1}{8}$, 求 $\alpha+\beta-\gamma$.

练0.2 (★★☆☆☆)

已知 $\tan\alpha$ 与 $\tan\beta$ 是方程$x^2-\sqrt{11}x-4=0$ 的两个实根, 且 $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$, 求证 : $\alpha-\beta=-\dfrac{2\pi}{3}$.

练0.3 (★★☆☆☆)

已知 $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{1}{2},\tan\beta=-\dfrac{1}{7}$, 且$\alpha,\beta\in(0,\pi)$, 求$2\alpha-\beta$ 的值.

练0.4 (★★☆☆☆)

设方程 $x^2+px+q=0$ 的两根是 $\tan\theta$ 和 $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)$，且方程的这两个根之比为 3：2，求 p 和 q 的值.

练0.5 (★★☆☆☆)

已知 $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{12}$, 求$\dfrac{1-\tan\alpha-\tan\beta-\tan\alpha\cdot\tan\beta}{1+\tan\alpha+\tan\beta-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$.

练0.6 (★★☆☆☆)

证明：$\tan 3\alpha-\tan 2\alpha-\tan\alpha=\tan\alpha\tan 2\alpha\tan 3\alpha$.

练0.7 (★★☆☆☆)

证明：$\tan(A-B)+\tan(B-C)+\tan(C-A)=\tan(A-B)\tan(B-C)\tan(C-A)$.

3.1.3 二倍角的正弦、余弦和正切

练0.1 (★★☆☆☆)

若 $x=\frac{\pi}{12}$，求 $\cos^4 x-\sin^4 x$ 的值.

练0.2 (★★☆☆☆)

已知 $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4}{5}$，求 $\frac{\sin 2x-2\sin^2 x}{1-\tan x}$ 的值.

练0.3 (★★☆☆☆)

已知 α 是第一象限角, 且 $\cos\alpha=\frac{5}{13}$，求 $\frac{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos(2\alpha+4\pi)}$ 的值.

练0.4 (★★☆☆☆)

设 $0<\alpha<\pi, \sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{5}$，求 $\cos 2\alpha$ 的值.

练0.5 (★★☆☆☆)

已知 $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{8}\right)=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{3\pi}{8}<x<\dfrac{7\pi}{8}\right)$，求 $\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的值.

练0.6 (★★☆☆☆)

求值：$\cos\dfrac{\pi}{17}\cos\dfrac{2\pi}{17}\cos\dfrac{4\pi}{17}\cos\dfrac{8\pi}{17}$.

练0.7 (★★☆☆☆)

求值：$\cos^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}+\cos^4\frac{5\pi}{8}+\cos^4\frac{7\pi}{8}$.

练0.8 (★★☆☆☆)

已知 $\tan\alpha = 2$, 求 $\tan 3\alpha$.

练0.9 (★★☆☆☆)

已知 $\tan^2\alpha = 2\tan^2\beta + 1$, 求 $\cos 2\beta - 2\cos 2\alpha$ 的值.

3.1.4　半角的正弦、余弦和正切

练0.1 (★★☆☆☆)

已知 $\cos\varphi=\dfrac{1}{3}$，并且$270°<\varphi<360°$，求$\sin\dfrac{\varphi}{2},\cos\dfrac{\varphi}{2},\tan\dfrac{\varphi}{2}$ 的值.

练0.2 (★★☆☆☆)

已知圆心角的正弦等于 $\frac{3}{5}$, 求所对圆弧的圆周角的正弦，余弦及正切.

练0.3 (★★☆☆☆)

化简：$\dfrac{\tan(45°-\alpha)}{1-\tan^2(45°-\alpha)}\cdot\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$.

练0.4 (★★☆☆☆)

求证：(1)$\dfrac{1+\sin\varphi}{\cos\varphi}=\dfrac{\cos\varphi}{1-\sin\varphi}=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\varphi}{2}\right)$

(2)$\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2a}\cdot\dfrac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\tan\dfrac{\alpha}{2}$.

练0.5 (★★☆☆☆)

已知 $\tan\alpha=\dfrac{m}{n}$，求$m\cos 2\alpha+n\sin 2\alpha$ 的值.

练0.6 (★★☆☆☆)

已知 $4\sin^2 x-6\sin x-\cos^2 x+3\cos x=0$，求$\frac{\cos 2x-\sin 2x}{(1-\cos 2x)(1-\tan 2x)}$ 的值.

3.1.5 复数的运算性质

1. 21 年八省联考第 10 题★★★☆☆ 设 z_1, z_2, z_3 为复数, $z_1 \neq 0$. 下列命题中正确的是 ( )

A. 若 $|z_2| = |z_3|$, 则 $z_2 = \pm z_3$

B. 若 $z_1 z_2 = z_1 z_3$, 则 $z_2 = z_3$

C. 若 $\bar{z}_2 = z_3$, 则 $|z_1 z_2| = |z_1 z_3|$

D. 若 $z_1 z_2 = |z_1|^2$, 则 $z_1 = z_2$

2. 20 年全国 II 卷第 15 题★★★☆☆ 设复数 z_1, z_2 满足 $|z_1| = |z_2| = 2, z_1 + z_2 = \sqrt{3} + \mathrm{i}$, 则 $|z_1 - z_2| =$__________.

3. ★★★☆☆ 设复数 z_1, z_2 满足 $|z_1| = |z_2| = 2, z_1 + z_2 = \sqrt{3} + \mathrm{i}$, 则 $z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2 =$__________.

4. ★★★★☆ 设复数 z_1, z_2 满足 $|z_1| = |z_1 + z_2| = 2, |z_1 - z_2| = 2\sqrt{3}$, 则 $\log_4 \left|(z_1 \cdot \bar{z}_2)^{2020} + (\bar{z}_1 \cdot z_2)^{2020}\right|$ __________.

第 3.2 节　解析几何

3.2.1　离心率：问题条件的弱化

例 1. 已知椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$, 焦距为 $2c$，

直线 $l:y=\sqrt{3}x$ 与椭圆 C 相交于 A,B 两点. 若 $|AB|=2c$, 求椭圆 C 的离心率.

法 1. 联立

法 2. 点的坐标代入方程

法 3. 定义

变式：如果将直线 l 的方程改为 $y=kx$, 求椭圆 C 的离心率的取值范围.

例 2. 已知椭圆 E $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右焦点分别为 $F_1(-c,0),F_2(c,0)$,

O 为坐标原点，下上顶点分别为 B_1、B_2，直线 $l:x=\dfrac{a^2}{c}$ 与 x 轴的交点为 A，

若 P 在椭圆的上顶点处，线段 AB_2 的中垂线恰过 F_2，求 C 的离心率 e.

变式：若椭圆上存在点 P，使得线段 AP 的垂直平分线过点 F_2, 求 e 的取值范围.

例 3. 已知椭圆 E $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右焦点分别为 F_1,F_2,

点 P 在椭圆 E 上，若点 P 横坐标为 $\dfrac{a}{2}$. 若点 M 为 PF_1 中点，且 $OP\perp F_2M$, 求椭圆 E 的离心率.

变式：如果去掉“点 P 横坐标为 $\dfrac{a}{2}$”，$\overrightarrow{F_1M}=2\overrightarrow{MP}$ 且 $OP\perp F_2M$, 求离心率的取值范围.

反思：问题的变式如何设计？

变式问题应该与原来的问题有一定的联系，可以从条件的替换，条件的加强、弱化等方向设计.

3.2.2 直线与抛物线

对抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$, 定点 $\mathrm{P}\left(x_0,y_0\right)$ 有以下典型问题:

1、求证过 C 上点 $\mathrm{A}\left(x_1,y_1\right),\mathrm{B}\left(x_2,y_2\right)$ 的直线斜率为 $k=\frac{2p}{y_1+y_2}$,
直线 AB 的方程为 $2px-\left(y_1+y_2\right)y+y_1y_2=0$.

2、过 C 上定点 P 作斜率互为相反数的直线 PA, PB, 点 A B 在 C 上，则 AB 斜率为定值.

3、P 在 C 上, 动弦 AB 使得 $\angle\mathrm{APB}=90^\circ$ 的充要条件为直线 AB 恒过定点 $\mathrm{P}'\left(2p+x_0,-y_0\right)$.

4、证明过 C 上点 $\mathrm{A}\left(x_1,y_1\right)$ 的切线方程为 $2px-2y_1y+y_1^2=0$ (也可写成 $y_1y=p\left(x+x_1\right)$ 形式).

5、过 M 做 C 切线 MA,MB, 设 AB 中点为 N, 则 MN 平行于 x 轴.

6、动直线 l 过 P 与 C 交于 A,B, 过 A,B 的切线交于 M，求 M 的轨迹方程.

7、令 M(m, 0) N(n, 0) 抛物线 C 的弦 AB 过 M, AN, BN 交执物线于 C、D，求 $\dfrac{k_{AB}}{k_{CD}}$.

练0.1 (★★☆☆☆)

已知抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$ 的焦点为 F, 直线 $l:y=kx+b(k\neq 0)$ 与抛物线 C 交于 A,B 两点, 且 $|AF|+|BF|=6$, 线段 AB 的垂直平分线过点 $M(0,4)$, 则抛物线 C 的方程是__________.

练0.2 (★★★☆☆)

已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F, 倾斜角为 $45°$ 的直线 l 过点 F 与抛物线 C 交于 A,B 两点, 且 $|AB|=8$

(1) 求 p ;

(2) 设点 E 为直线 $x=\frac{p}{2}$ 与抛物线 C 在第一象限的交点, 过点 E 作 C 的斜率分别为 k_1,k_2 的两条弦 EM, EN, 如果 $k_1+k_2=-1$, 证明直线 MN 过定点, 并求出定点坐标.

练0.3 (21 年八省联考★★★★☆)

已知抛物线 $y^2=2px$ 上三点 $A(2,2),B,C$，直线 AB,AC 是圆 $(x-2)^2+y^2=1$ 的两条切线，则直线 BC 的方程为 () (　　)

A. $x+2y+1=0$　　B. $3x+6y+4=0$　　C. $2x+6y+3=0$　　D. $x+3y+2=0$

3.2.3 抛物线的焦点弦性质

对抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$, 焦点为 $\mathrm{F}\left(\frac{p}{2},0\right)$, 还有以下典型问题: 过 A 的 C 的切线交 x 轴、准线、y 轴、过 F 的 x 轴垂线于 S、T、Q、M，求证：

1. $\mathrm{FQ}\perp\mathrm{AQ}$

2. $\angle ASF=\angle SAF$ 且 $FS=FA$

3. $\angle\mathrm{MTF}=\angle\mathrm{TMF}$ 且 $\mathrm{FT}=\mathrm{FM}$

4. 当 A 运动时，以 AF 为直径的圆是否恒与某条直线相切?

5. 当 A 运动时, 以 AT 为直径的圆是否恒过定点?

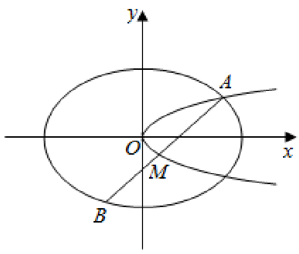
6. 抛物线的光学性质：从焦点 F 发出的光线经过抛物线上点反射后，反射光线平行于 x 轴.

7. 过原点 O 作切线 AS 的垂线与 AF 交于 R，求 R 的轨迹.

1. ★★★☆☆ 已知粗圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2, P 为椭圆上不与左右顶点重合的任意一点, I,G 分别为 ΔPF_1F_2 的内心和重心，当 $IG\perp x$ 轴时，椭圆的离心率为 ( )

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

2. ★★★★☆ 如图，已知椭圆 $C_1:\frac{x^2}{2}+y^2=1$, 抛物线 $C_2:y^2=2px(p>0)$ 点 A 是椭圆 C_1 与抛物线 C_2 的交点. 过点 A 的直线 l 交椭圆 C_1 于点 B, 交抛物线 C_2 于点 M(B,M 不同于 A).



(I) 若 $p=\frac{1}{16}$, 求抛物线 C_2 的焦点坐标;

(II) 若存在不过原点的直线 l 使 M 为线段 AB 的中点，求 p 的最大值.

3.2.4　向量条件

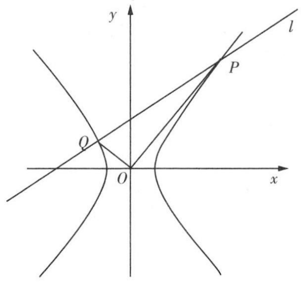
1. ★★★★☆　在平面直角坐标系 xoy 中，椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 上有三点 A,B,C，满足 $\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{AO},\overrightarrow{BP}=\frac{5}{2}\overrightarrow{BC}$, 则直线 OA，OB 的斜率之积为 __________.

3.2.5 设点设线

1. ★★⯪☆☆ 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$, O 为坐标原点，离心率 $e=2$, 点 $M(\sqrt{5},\sqrt{3})$ 在双曲线上 .

(I) 求双曲线的方程;

(II) 如图，若直线 l 与双曲线的左、右两支分别交于点 Q、P 且 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$, 求 $|OP|^2+|OQ|^2$ 的最小值.



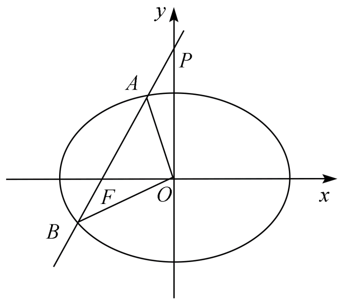
3.2.6 面积范围问题

例1 (★★☆☆☆)

在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 $\mathrm{E}: \frac{\mathrm{x}^2}{a^2}+\frac{\mathrm{y}^2}{b^2}=1$ 的左焦点为 $F(-1,0)$, 左准线方程为 $x=-2$.

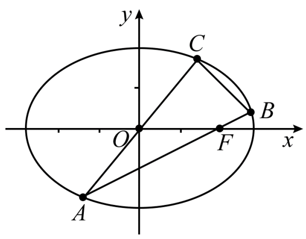
(1) 求糊圆 C 的标准方程

(2) 若 A,B 两点满足 $OA\perp OB$(O 为坐标原点)，求 $\triangle AOB$ 面积的取值范围.



例2 (★★★☆☆)

在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 $\mathrm{E}: \frac{\mathrm{x}^2}{2}+\mathrm{y}^2=1$, 点 A 是椭圆上异于长轴端点的任一点，$F$ 为椭圆的右焦点，直线 AF 与椭圆交于 B 点，直线 AO 与椭圆交于 C 点，求 $\triangle\mathrm{ABC}$ 面积的最大值.



例3 (★★★☆☆)

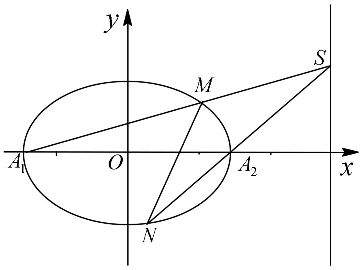
设椭圆 E: $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$, P 为椭圆 C: $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 上任意一点，过点 P 的直线 $y=kx+m$ 交椭圆 E 于 A, B 两点，射线 PO 交椭圆 E 于点 Q.

(1) 求 $\dfrac{OQ}{OP}$ 的值；

(2) 求 $\triangle ABQ$ 面积的最大值.

例4 (★★★★☆)

如图，已知椭圆C: $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$, 设 A_1, A_2 分别为椭圆C 的左、右顶点, S 为直线 $x=2\sqrt{2}$ 上一动点 (不在 x 轴上), 直线 A_1S 交椭圆 C 于点 M，直线 A_2S 交椭圆 C 于点 N，设 S_1,S_2 分别为 $\triangle A_1SA_2$, $\triangle MSN$ 的面积, 求$\frac{S_1}{S_2}$ 的最大值.



例5 (★★★☆☆)

已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过点 $(-\sqrt{2},1)$, 离心率是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 直线 l 过椭圆的右焦点 F, 且与椭圆交于 M,N 两点 (M,N 两点均位于 y 轴的右侧), 与 y 轴交于 Q 点.

(1) 求椭圆的标准方程;

(2) 如图 1, 是否存在直线 l, 使得 $\frac{1}{|QM|}+\frac{1}{|QN|}=\frac{4}{|QF|}$ 成立　若存在 , 求出 l 的方程 ; 若不存在 , 请说明理由;

(3) 如图 2, 若点 A,B 在椭圆上 , 点 C 为椭圆上顶点, 且四边形 $CADB$ 是矩形 , 求矩形 $CADB$ 的面积 S 的最大值 .

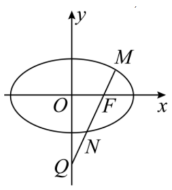


图1

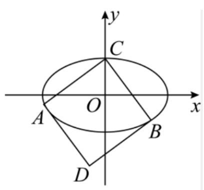


图2

3.2.7 圆锥曲线 *

1. ★★★☆☆ 已知焦点在 x 轴上的椭圆 $E:\dfrac{x^2}{8}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 内含圆 $C:x^2+y^2=\dfrac{8}{3}$. 圆 C 的切线 l 与椭圆 E 交于 A, B 两点, 满足 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$($O$ 为坐标原点).

(I) 求 b^2 的值;

(II) 求 $|AB|$ 的取值范围.

2. ★★★☆☆ 设一椭圆的中心是坐标原点, 长轴在 x 轴上, 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 若圆 $C:x^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=1$ 上的点与这个椭圆上的点的最大距离为 $1+\sqrt{7}$, 求这个椭圆的方程.

3. ★★★☆☆ 椭圆 C 方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$, 试确定 m 的范围, 使得对于直线 $l:y=4x+m$, 椭圆上总有不同的两点关于直线 l 对称.

4. 2013 年全国高中数学联赛试题★★★★☆ 在平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>$

$0), A_1, A_2$ 分别为椭圆的左、右顶点, F_1, F_2 分别为椭圆的左、右焦点, P 为椭圆上不同于 A_1 和 A_2 的任意一点. 若平面中两个点 Q、R 满足 $QA_1 \perp PA_1, QA_2 \perp PA_2, RF_1 \perp PF_1, RF_2 \perp PF_2$, 试确定线段 QR 的长度与 b 的大小关系, 并给出证明.

5. 2009 年全国高中数学联赛试题★★★★☆ 设直线 $l: y = kx + m$(其中 k m 为整数) 与椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ 交于不同两点 A 、B, 与双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ 交于不同两点 C D, 问是否存在直线 l, 使得向量 $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 0$? 若存在, 指出这样的直线有多少条; 若不存在, 请说明理由.

6. 2013 年贵州省数学竞赛试题★★★★☆

已知抛物线 $C: y^2=4x$, 过点 $A(1,2)$ 作抛物线 C 的弦 AP, AQ

(I) 若 $AP\perp AQ$. 证明直线 PQ 经过一个定点, 并求出定点坐标.

(II) 假设直线 PQ 过点 $T(5,-2)$, 请问是否存在以 PQ 为底边的等腰 $\triangle APQ$? 若存在, 求出 $\triangle APQ$ 的个数; 若不存在, 请说明理由.

7. 2006 年湖南省数学竞赛试题★★★★☆　设 A、B 分别是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 和双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的公共的左、 右顶点, P 、Q 分别为双曲线和椭圆上不同于 A 、B 的两个动点, 其满足 $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}=\lambda(\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{BQ})(\lambda\in\mathbf{R},|\lambda|>1)$ 设直线 AP 、BP、AQ, BQ 的斜率分别为 k_1,k_2,k_3,k_4.

(I) 求证: $k_1+k_2+k_3+k_4=0$

(II) 设 F_1,F_2 分别是椭圆和双曲线的右焦点, 若 $PF_2//QF_1$, 求 $k_1^2+k_2^2+k_3^2+k_4^2$ 的值.

3.2.8 圆锥曲线的参数方程 *

1. 2014 年全国高中数学联赛试题★★★☆☆

设等边三角形 ABC 的内切圆半径为 2，圆心为 I，若点 P 满足 $PI=1$, 则 $\triangle APB$ 与 $\triangle APC$ 的面积之比的最大值为__________.

2. 2006 年辽宁省数学竞赛试题★★★☆☆

在抛物线 $y^2=2x$ 上求一点 C, 使得对任意过点 $P(3,-\sqrt{2})$ 的直线与该抛物线的两个交点 A 、B, 都有 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$.

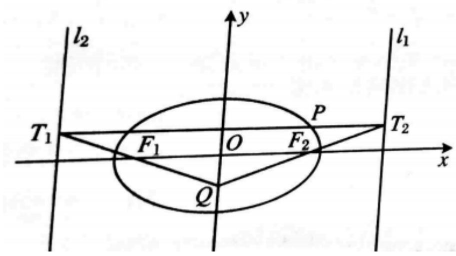
3. 2011 **年河南省数学竞赛试题**★★★☆☆ 在平面直角坐标系 xOy 中, 以原点 O 为圆心, 分别以 a $b(a>b>0)$ 为半径作两个圆. 点 Q 是大圆半径 OP 与小圆的交点, 过点 P 作 $PN\perp Ox$, 垂足为 N 过点 Q 作 $QM\perp PN$, 垂足为 $\boldsymbol{M}$. 记当半径 OP 绕点 O 旋转时点 M 的轨迹为曲线 E.

(Ⅰ) 求曲线 E 的方程

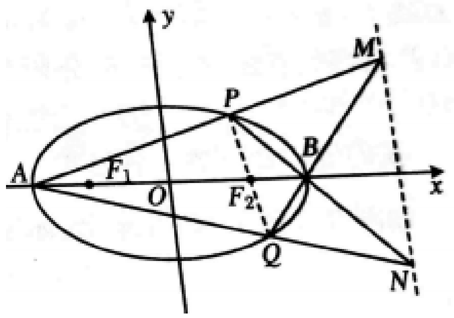
(Ⅱ) 设 A 、B 、C 为曲线 E 上的三点, 且满足 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

4. 2005 **河北省数学竞赛试题**☆☆☆☆☆

已知过椭圆 C 上一点 P 与对称轴平行的直线交稍圆 C 的两条准线于点 T_1,T_2 它们分别与同侧焦点 F_1,F_2 的连线交于点 Q. 求证:P 、F_1 、Q, F_2 四点共圆.



5. 2012 年贵州省数学竞赛试题★★★☆☆　如图所示, 已知 A 、B 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右顶点, $P\ Q$ 是该椭圆上不同于顶点的两点, 且直线 AP 与 QB 、PB 与 AQ 分别交于点 M 、N .

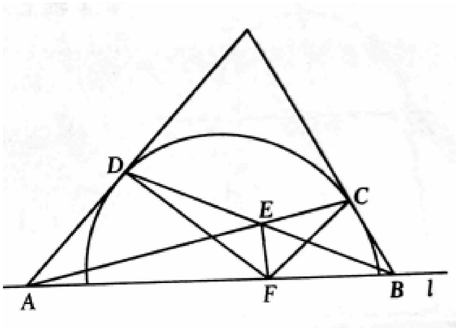


(I) 求证 : $MN\perp AB$;

(II) 若弦 PQ 过柯圆的右焦点 F_2, 求直线 MN 的方程.

6. 2014 年全国高中数学联赛 B 组试题★★★★☆　证明：若$\triangle A_1A_2A_3$ 的三边A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 (或其延长线) 与椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 分别切于点T_1, T_2, T_3, 则A_1T_2, A_2T_3, A_3T_1 三线共点.

7. **第 35 届 IMO 预选题★★★★☆** 如图所示, 在一条直线 l 的一侧画一个半圆 Γ, 分别过半圆 Γ 上两点 C D 作 Γ 的切线与 l 交于点 B A, 且使 Γ 的圆心在 AB 上 AC 与 BD 交于点 E, 过点 E 作 $EF\perp l$ 于点 F. 求证: EF 平分 $\angle CFD$.



8. **2010 年江苏省数学竞赛试题★★★☆☆** 如图所示 P 是半圆 $O:x^2+y^2=1(y\geqslant 0)$ 上位于 x 轴上方的任意一点, A B 是直径的两个端点, 以 AB 为一边作正方形 $ABCD$,PC，PD 分别交 AB 于 E,F 两点求证 $|BE|$、$|EF|$ 、$|FA|$ 成等比数列.

9. 1996 年中国国家集训队选拔考试试题★★★★☆ 如图所示, 以 $\triangle ABC$ 的底边 BC 为直径作半圆, 分别与边 AB AC 交于点 D, E, 分别过点 D E 作 BC 的垂线, 垂足分别为 F G, 线段 DG 和 EF 交于点 M, 求证: $AM \perp BC$.

3.2.9 圆锥曲线极坐标方程 *

1. (2014 年全国高中数学联赛) 设椭圆 C 的两个焦点是 F_1,F_2, 过点 F_1 的直线与 Γ 交于点 P,Q. 若 $|PF_2|=|F_1F_2|$, 且 $3\,|PF_1|=4\,|QF_1|$, 则稍圆 Γ 的短轴与长轴的比值为 __________.

2. (2004 年湖南省数学竞赛试题) 在周长为定值的 $\triangle ABC$ 中，已知 $AB=6$, 且当顶点 C 位于定点 P 时，$cosC$ 有最小值为 $\dfrac{7}{25}$

(I) 建立适当的坐标系，求顶点 C 的轨迹方程;

(II) 过点 A 作直线与 (1) 中的曲线交于 M、N 两点，求 $|\overrightarrow{BM}|\cdot|\overrightarrow{BN}|$ 的最小值的集合.

3. (2008 四川省数学竞赛) 设 F 是抛物线 $y^2=4x$ 的焦点, A B 为抛物线上异于原点 O 的两点，且满足 $\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}=0$，延长 AF 、BF 分别交抛物线于点 C 、D . 求四边形 $ABCD$ 面积的最小值.

4. (2000 年全国高中数学联赛试题) 已知$C_0: x^2+y^2=1$ 与$C_1: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$, 试问: 当且仅当$a,b$ 满足什么条件时，对 C_1 上任意一点 P, 均存在以 P 为顶点，与 C_0 外切、与 C_1 内接的平行四边形？证明你的结论.

5. (2012 年江苏高考) 在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$. 设 $A,,B$ 是椭圆上位干 x 轴上方的两点，且直线 AF_1 与直线 BF_2 平行, AF_2 与 BF_1 交于点 P , 求证. $|PF_1|+|PF_2|$ 是定值.

1.(1991 年全国高中数学联赛试题) 设 O 为抛物线的顶点，F 为焦点，且 PQ 为过 F 的弦。已知 $OF=a$,$PQ=b$ 求 $\triangle OPQ$ 的面积.

2. A,B 是双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ 上的两个动点, 满足 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$, 求证: (1) $\frac{1}{|OA|^2}+\frac{1}{|OB|^2}$ 为定值;
(2) 动点P 在线段AB 上, 满足$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}=0$, 则点$P$ 在定圆上.

3.2.10 帕斯卡定理背景 *

1. ★★★★☆ 10. 已知抛物线 $x^2=2py$, 准线方程为 $y=-\frac{1}{4}$ 。

(I) 试求抛物线的方程

(II) 如图，直线 l_1 与 l_2 均郭点 $P(1,3)$，分别交抛物线于点 A,B 和点 C,D，直线 DQ 交抛物线于点 F，直线 BQ 交抛物线于点 E，设直线 CE 于直线 AF 交于点 R，求证：P,Q,R 三点共线.

3.2.11 做繁的和做断的题 *

1. 2020 年高中数学联赛第 11 题 ★★★★☆ 在平面直角坐标系中，点 A,B,C 在双曲线 $xy=1$ 上，满足 ΔABC 为等腰直角三角形. 求 ΔABC 的面积的最小值.

(I)

(II)

第 3.3 节　立体几何

第 4 章　概率与统计

第 4.1 节　计数与二项式定理

第 4.2 节　概率与统计

第 5 章　数学建模活动与数学探究活动

第 5.1 节　数学探究

第 5.2 节　数学建模

第 6 章　数学文化

第 6.1 节　数学文化

第 7 章　教学随笔

7.0.1 创新的要素

1. 创新要突破传统习惯（理所当然）的束缚
2. 创新要你能够被别人快速的检验
3. 创新要能够引领一大批人