

江苏省仪征中学 2018-2019 学年第二学期期末复习讲义 (2)

1. $(x - \frac{1}{x})(2x + \frac{1}{x})^5$ 的展开式中, 常数项为_____. 【答案】 -40

2. 古代埃及数学中发现有一个独特现象: 除 $\frac{2}{3}$ 用一个单独的符号表示以外, 其它分数都要写成若干个单分数和的形式. 例如 $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$, 可以这样理解: 假定有两个面包, 要平均分给 5 个人, 如果每人 $\frac{1}{2}$, 不够, 每人 $\frac{1}{3}$, 余 $\frac{1}{3}$, 再将这 $\frac{1}{3}$ 分成 5 份, 每人得 $\frac{1}{15}$, 这样每人分得 $\frac{1}{3} + \frac{1}{15}$.

形如 $\frac{2}{2n+1}$ ($n = 2, 3, 4, \dots$) 的分数的分解: $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$, $\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$, $\frac{2}{9} = \frac{1}{5} + \frac{1}{45}$, 按此规律,

$\frac{2}{2n+1} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(2n+1)}$ 【答案】 $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(2n+1)}$

3. $(2x - 1)^6 = a_6x^6 + a_5x^5 + \dots + a_1x + a_0$, 则 $|a_0| + |a_1| + |a_2| + \dots + |a_6| = \underline{\hspace{2cm}}$.
【答案】 729

4. 函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2 + 6x - 5}}$ 在区间 $(m, m+1)$ 上递减, 则 m 的取值范围是_____.

【答案】 $[1, 2]$

5. $\frac{1}{2^{2018}}(C_{2018}^0 - 3C_{2018}^2 + 3^2C_{2018}^4 - 3^3C_{2018}^6 + \dots + 3^{1008}C_{2018}^{2016} - 3^{1009}C_{2018}^{2018}) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $-\frac{1}{2}$

6. 知函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数, 且在 $(-\infty, 0]$ 上是增函数, 设

$a = f(\log_{\frac{1}{4}} 7), b = f((\frac{3}{5})^{\frac{1}{5}}), c = f((\frac{2}{5})^{\frac{3}{5}})$, 则 a, b, c 按从小到大的顺序为_____.

【答案】 $a < b < c$

7. $y = m$ 分别与曲线 $y = 2(x + 1)$, 与 $y = x + \ln x$ 交于点 A, B , 则 $|AB|$ 的最小值为_____.

【答案】 $\frac{3}{2}$

8. 函数 $f(x) = x^3 + (1 - a)x^2 - a(a + 2)x$ ($a \in R$) 在区间 $(-2, 2)$ 不单调,

则 a 的取值范围是_____ . 【答案】 $(-8, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}, 4)$

9. 函数 $f(x) = ax^3 - x^2 + x + 2$, $g(x) = \frac{e \ln x}{x}$, 若对于 $\forall x_1 \in (0, 1], \forall x_2 \in (0, 1]$, 都有 $f(x_1) \geq g(x_2)$, 则实数 a 的取值范围是_____ . 【答案】 $[-2, +\infty)$

10. 数 $f(x)$ 满足 $f(x+3) = -\frac{1}{f(x)}$, 且在 $(-3, 0]$ 上, $f(x) = \begin{cases} 1 + \cos \frac{\pi x}{3}, & -3 < x \leq -\frac{3}{2}, \\ |x-2| + 2, & -\frac{3}{2} < x \leq 0, \end{cases}$

$f(f(\frac{39}{2})) = \underline{\hspace{2cm}}$. 【答案】 5

11 已知函数 $f(x) = 3^x - 3^{-x}$, $f(1-2\log_3 t) + f(3\log_3 t - 1) \geq \log_{\frac{1}{3}} t$, 则实数 t 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$. 【答案】 $[1, +\infty)$

12. 直线 l_1, l_2 分别是函数 $f(x) = \begin{cases} -\ln x, & 0 < x < 1, \\ \ln x, & x > 1, \end{cases}$ 图象上点 P_1, P_2 处的切线, l_1 与 l_2 垂直

相交于点 P , 且 l_1, l_2 分别与 y 轴相交于点 A, B , 则 $\triangle PAB$ 的面积取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$

【答案】 $(0, 1)$

13. 已知命题 p : 函数 $f(x) = \lg(ax^2 - x + \frac{1}{16}a)$ 的定义域为 R , 命题 q : 方程

$4x^2 + 4(a-2)x + 1 = 0$ 无实根.

(1) 若 $\neg p$ 为真命题, 求的取值范围;

(2) 若 $p \vee q$ 为真, $p \wedge q$ 为假, 求实数 a 的取值范围.

【答案】 $p: a > 2$ $q: 1 < a < b$ 综上所述: $a \in (1, 2] \cup [3, +\infty)$

14. 已知函数 $f(x) = x|x-a| + 2x$.

(1) 当 $a=3$ 时, 方程 $f(x) = m$ 的解的个数;

(2) 若对任意 $x \in [1, 2]$ 时, 函数 $f(x)$ 的图象恒在函数 $g(x) = 2x+1$ 图象的下方, 求实数 a 的取值范围;

(3) 若函数 $f(x)$ 在 $(-4, 2)$ 上单调递增, 求 a 的范围.

解: (1) $m < 6$ 或 $m > \frac{25}{4}$ 时, 1 解;

$m = 6$ 或 $\frac{25}{4}$ 时, 2 解;

$6 < m < \frac{25}{4}$ 时, 3 解。

(2) $\frac{3}{3} < a < 2$

(3) 综上: $a \leq 6$ 或 $a \geq 2$

15. 十九大提出对农村要坚持精准扶贫，至 2020 年底全面脱贫。现有扶贫工作组到某山区贫困村实施脱贫工作。经摸底排查，该村现有贫困农户 100 家，他们均从事水果种植，2017 年底该村平均每户年纯收入为 1 万元，扶贫工作组一方面请有关专家对水果进行品种改良，提高产量；另一方面，抽出部分农户从事水果包装、销售工作，其人数必须小于种植的人数。从 2018 年初开始，若该村抽出 $5x$ 户 ($x \in \mathbf{Z}, 1 \leq x \leq 9$) 从事水果包装、销售。经测算，剩下从事水果种植农户的年纯收入每户平均比上一年提高 $\frac{x}{20}$ ，而从事包装销售农户的年纯收入每户平均为 $(3 - \frac{1}{4}x)$ 万元 (参考数据： $1.1^3 = 1.331$, $1.15^3 \approx 1.521$, $1.2^3 = 1.728$)。

- (1) 至 2020 年底，为使从事水果种植农户能实现脱贫 (每户年均纯收入不低于 1 万 6 千元)，至少抽出多少户从事包装、销售工作？
- (2) 至 2018 年底，该村每户年均纯收入能否达到 1.35 万元？若能，请求出从事包装、销售的户数；若不能，请说明理由。

解：(1) $(1 + \frac{x}{20})^3 \geq 1.6$

$y = (1 + \frac{x}{20})^3$ 在 $x \in [1, 9]$ 上 $\uparrow$ ；

$x = 2 \quad 1.1^3 = 1.331 \geq 1.6$ 不满足要求

$x = 3$ 不满足要求

$x = 4$ 满足要求

$\therefore$ 抽出 $4 \times 5 = 20$ 户。

(2) $y = \frac{1}{100} [5x(3 - \frac{x}{4}) + (1 + \frac{x}{20})(100 - 5x)]$

$3x^2 - 30x + 70 \leq 0 \Rightarrow x = 4, 5, 6$

$x \in \mathbf{N}, 1 \leq x \leq 9$

分别为 20 户、25 户、30 户。

16. 已知函数 $f(x) = ax^3 - x^2 + bx$ ($a, b \in \mathbb{R}$), $f'(x)$ 为其导函数, 且 $x=3$ 时 $f(x)$ 有极小值 -9 .

(1) 求 $f(x)$ 的单调递减区间;

(2) 若 $g(x) = 2mf'(x) + (6m-8)x + 6m+1$, $h(x) = mx$, 当 $m > 0$ 时, 对于任意 x , $g(x)$ 和 $h(x)$ 的值至少有一个是正数, 求实数 m 的取值范围;

(3) 若不等式 $f'(x) > k(x \ln x - 1) - 6x - 4$ (k 为正整数) 对任意正实数 x 恒成立, 求 k 的最大值.

解: (1) $a = \frac{1}{3}, b = -3$

$(-1, 3)$ 递减。

(2) $g(x) > 0$ 在 $(-\infty, 0)$ 上恒成立。

$$\textcircled{1} \quad 0 < m \leq 4$$

$$\textcircled{2} \quad \begin{cases} m > 4 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Rightarrow 4 < m < 8$$

$$\therefore m \in (0, 8)$$

$$(3) \quad k_{\max} = 6$$