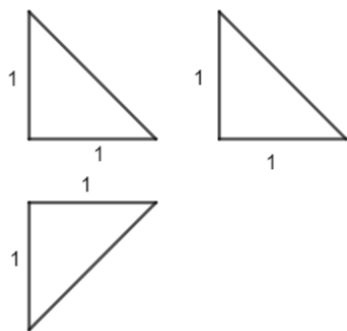


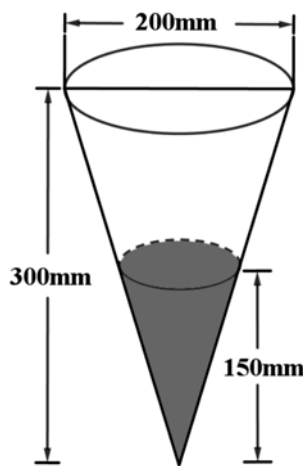
2021 年普通高等学校招生全国统一考试（北京卷）数学

一、选择题：共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分，在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

- 已知集合 $A = \{x | -1 < x < 1\}$, $B = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$, 则 $A \cup B =$ ().
A. $(-1, 2)$; B. $(-1, 2]$; C. $[0, 1)$; D. $[0, 1]$.
- 在复平面内, 复数 z 满足 $(1-i)z = 2$, 则 $z =$ ().
A. $2+i$; B. $2-i$; C. $1-i$; D. $1+i$.
- 已知 $f(x)$ 是定义在上 $[0, 1]$ 的函数, 那么“函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增”是“函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值为 $f(1)$ ”的 ().
A. 充分而不必要条件; B. 必要而不充分条件;
C. 充分必要条件; D. 既不充分也不必要条件.
- 某四面体的三视图如图所示, 该四面体的表面积为 ().
A. $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$; B. 4;
C. $3+\sqrt{3}$; D. 2.
- 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 过点 $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, 且离心率为 2, 则该双曲线的标准方程为 ().
A. $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$; B. $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$; C. $x^2 - \frac{\sqrt{3}y^2}{3} = 1$; D. $\frac{\sqrt{3}x^2}{3} - y^2 = 1$.
- $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是两个等差数列, 其中 $\frac{a_k}{b_k} (1 \leq k \leq 5)$ 为常值, $a_1 = 288$, $a_5 = 96$, $b_1 = 192$, 则 $b_3 =$ ().
A. 64; B. 128; C. 256; D. 512.
- 函数 $f(x) = \cos x - \cos 2x$, 试判断函数的奇偶性及最大值 ().
A. 奇函数, 最大值为 2;
B. 偶函数, 最大值为 2;
C. 奇函数, 最大值为 $\frac{9}{8}$;
D. 偶函数, 最大值为 $\frac{9}{8}$.
- 定义: 24 小时内降水在平地上积水厚度 (mm) 来判断降雨程度. 其中小雨 ($< 10\text{mm}$), 中雨 ($10\text{mm} - 25\text{mm}$), 大雨 ($25\text{mm} - 50\text{mm}$), 暴雨 ($50\text{mm} - 100\text{mm}$), 小明用一个圆锥形容器接了 24 小时的雨水, 如图, 则这天降雨属于哪个等级 ().
A. 小雨; B. 中雨; C. 大雨; D. 暴雨.
- 已知圆 $C: x^2 + y^2 = 4$, 直线 $l: y = kx + m$, 当 k 变化时, l 截得圆 C 弦长的最小值为 2, 则 $m =$ ().
A. ± 2 B. $\pm\sqrt{2}$ C. $\pm\sqrt{3}$ D. $\pm\sqrt{5}$
- 数列 $\{a_n\}$ 是递增的整数数列, 且 $a_1 \geq 3$, $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 100$, 则 n 的最大值为 ().
A. 9; B. 10; C. 11; D. 12.



曲线



二、填空题：5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11. $(x^3 - \frac{1}{x})^4$ 展开式中常数项为_____.

12. 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$, 焦点为 F , 点 M 为抛物线 C 上的点, 且 $|FM| = 6$, 则 M 的横坐标是_____;
作 $MN \perp x$ 轴于 N , 则 $S_{\triangle FMN} =$ _____.

13. $\vec{a} = (2, 1)$, $\vec{b} = (2, -1)$, $\vec{c} = (0, 1)$, 则 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} =$ _____; $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ _____.

14. 若点 $P(\cos \theta, \sin \theta)$ 与点 $Q(\cos(\theta + \frac{\pi}{6}), \sin(\theta + \frac{\pi}{6}))$ 关于 y 轴对称, 写出一个符合题意的 $\theta =$ _____.

15. 已知函数 $f(x) = |\lg x| - kx - 2$, 给出下列四个结论:

①若 $k = 0$, 则 $f(x)$ 有两个零点; ② $\exists k < 0$, 使得 $f(x)$ 有一个零点;

③ $\exists k < 0$, 使得 $f(x)$ 有三个零点; ④ $\exists k > 0$, 使得 $f(x)$ 有三个零点.

以上正确结论得序号是_____.

三、解答题: 共 6 小题, 共 85 分, 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

16. 已知在 $\triangle ABC$ 中, $c = 2b \cos B$, $C = \frac{2\pi}{3}$.

(1) 求 B 的大小;

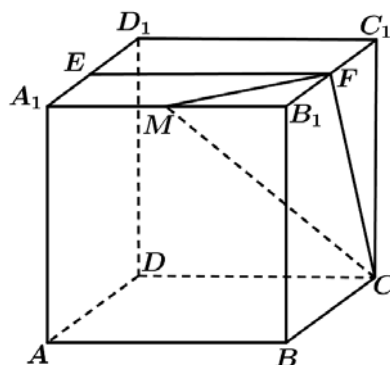
(2) 在下列三个条件中选择一个作为已知, 使 $\triangle ABC$ 存在且唯一确定, 并求出 BC 边上的中线的长度.

① $c = \sqrt{2}b$; ② 周长为 $4 + 2\sqrt{3}$; ③ 面积为 $S_{\triangle ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$;

17. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$, 点 E 为 A_1D_1 中点, 直线 B_1C_1 交平面 CDE 于点 F .

(1) 证明: 点 F 为 B_1C_1 的中点;

(2) 若点 M 为棱 A_1B_1 上一点, 且二面角 $M - CF - E$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$, 求 $\frac{A_1M}{A_1B_1}$ 的值.



18. 为加快新冠肺炎检测效率, 某检测机构采取 “ k 合 1 检测法”, 即将 k 个人的拭子样本合并检测, 若为阴性, 则可以确定所有样本都是阴性的; 若为阳性, 则还需要对本组的每个人再做检测. 现有 100 人, 已知其中 2 人感染病毒.

(1) ①若采用 “10 合 1 检测法”, 且两名患者在同一组, 求总检测次数;

②已知 10 人分成一组, 分 10 组, 两名感染患者在同一组的概率为 $\frac{1}{11}$, 定义随机变量 X 为总检测

次数, 求检测次数 X 的分布列和数学期望 $E(X)$;

(2) 若采用 “5 合 1 检测法”, 检测次数 Y 的期望为 $E(Y)$, 试比较 $E(X)$ 和 $E(Y)$ 的大小(直接写出结果).

19. 已知函数 $f(x) = \frac{3-2x}{x^2+a}$.

(1) 若 $a=0$, 求 $y=f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处切线方程;

(2) 若函数 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极值, 求 $f(x)$ 的单调区间, 以及最大值和最小值.

20. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $A(0, -2)$, 以四个顶点围成的四边形面积为 $4\sqrt{5}$.

(1) 求椭圆 E 的标准方程;

(2) 过点 $P(0, -3)$ 的直线 l 斜率为 k , 交椭圆 E 于不同的两点 B, C , 直线 AB, AC 交 $y=-3$ 于点 M, N , 直线 AC 交 $y=-3$ 于点 N , 若 $|PM| + |PN| \leq 15$, 求 k 的取值范围.

21. 定义 R_p 数列 $\{a_n\}$: 对实数 p , 满足: ① $a_1 + p \geq 0, a_2 + p = 0$; ② $\forall n \in N^*, a_{4n-1} < a_{4n}$; ③ $a_{m+n} \in \{a_m + a_n + p, a_m + a_n + p + 1\}, m, n \in N^*$.

(1) 对于前 4 项 2, -2, 0, 1 的数列, 可以是 R_2 数列吗? 说明理由;

(2) 若 $\{a_n\}$ 是 R_0 数列, 求 a_5 的值;

(3) 是否存在 p , 使得存在 R_p 数列 $\{a_n\}$, 对 $\forall n \in N^*, S_n \geq S_{10}$? 若存在, 求出所有这样的 p ; 若不存在, 说明理由.

《初高中数学教研微信系列群》简介:

目前有 15 个群 (13 个高中群, 2 个初中群), 共 5000 多优秀、特、高级教师, 省、市、区县教研员、教辅公司数学编辑、报刊杂志高中数学编辑等汇聚而成, 是一个围绕高中数学教学研究展开教研活动的微信群.

宗旨: 脚踏实地、不口号、不花哨、接地气的高中数学教研!

特别说明:

1. 本系列群只探讨高中数学教学研究、高中数学试题研究等相关话题;

2. 由于本群是集“研究—写作—发表(出版)”于一体的“桥梁”, 涉及业务合作, 特强调真诚交流, 入群后立即群名片:

教师格式: 省+市+真实姓名, 如: 四川成都张三

编辑格式: 公司或者刊物(简写)+真实姓名

欢迎各位老师邀请你身边热爱高中数学教研(不喜欢研究的谢绝)的教师好友(学生谢绝)加入, 大家共同研究, 共同提高!

群主二维码: 见右图



2021 年普通高等学校招生全国统一考试（北京卷）数学

参考答案与试题解析

第一部分（选择题共 40 分）

一、选择题：共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分，在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合 $A = \{x | -1 < x < 1\}$, $B = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$, 则 $A \cup B =$ ()

- A. $(-1, 2)$ B. $(-1, 2]$ C. $[0, 1)$ D. $[0, 1]$

【思路分析】结合题意利用并集的定义计算即可.

【解析】：由题意可得： $A \cup B = \{x | -1 < x \leq 2\}$, 即 $A \cup B = (-1, 2]$. 故选：B.

2. 在复平面内，复数 z 满足 $(1-i)z = 2$, 则 $z =$ ()

- A. $2+i$ B. $2-i$ C. $1-i$ D. $1+i$

【思路分析】由题意利用复数的运算法则整理计算即可求得最终结果.

【解析】：由题意可得： $z = \frac{2}{1-i} = \frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2(1+i)}{2} = 1+i$. 故选：D.

3. 已知 $f(x)$ 是定义在上 $[0, 1]$ 的函数，那么“函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增”是“函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值为 $f(1)$ ”的 ()

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

【思路分析】利用两者之间的推出关系可判断两者之间的条件关系.

【解析】：若函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增，则 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值为 $f(1)$,

若 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值为 $f(1)$, 比如 $f(x) = \left(x - \frac{1}{3}\right)^2$,

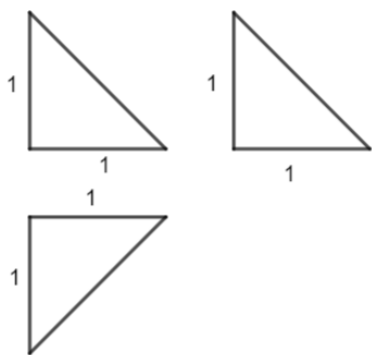
但 $f(x) = \left(x - \frac{1}{3}\right)^2$ 在 $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ 为减函数，在 $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$ 为增函数，

故 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值为 $f(1)$ 推不出 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增，

故“函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增”是“ $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值为 $f(1)$ ”的充分不必要条件，

故选：A.

4. 某四面体的三视图如图所示，该四面体的表面积为 ()



- A. $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$ B. 4 C. $3+\sqrt{3}$ D. 2

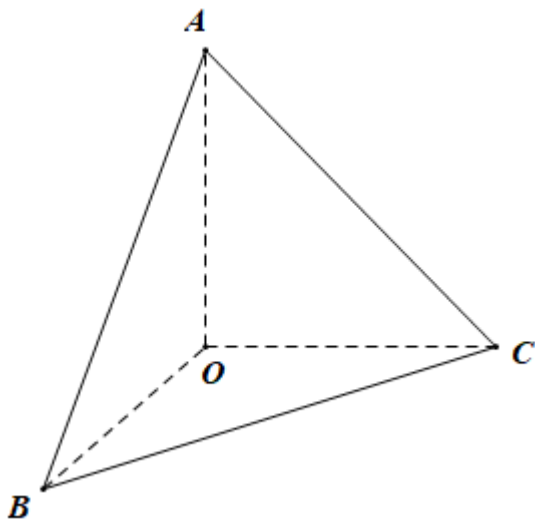
【思路分析】根据三视图可得如图所示的几何体（三棱锥），根据三视图中的数据可计算该几何体的表面积.

【解析】：根据三视图可得如图所示的几何体-正三棱锥 $O-ABC$ ，

其侧面为等腰直角三角形，底面等边三角形，

由三视图可得该正三棱锥的侧棱长为 1，

故其表面积为 $3 \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 + \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\sqrt{2})^2 = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$ ， 故选：A.



5. 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 过点 $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ ，且离心率为 2，则该双曲线的标准方程为（ ）

- A. $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ B. $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ C. $x^2 - \frac{\sqrt{3}y^2}{3} = 1$ D. $\frac{\sqrt{3}x^2}{3} - y^2 = 1$

【思路分析】分析可得 $b = \sqrt{3}a$ ，再将点 $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ 代入双曲线的方程，求出 a 的值，即可得出双曲线的标准方程.

【解析】： $\because e = \frac{c}{a} = 2$ ，则 $c = 2a$ ， $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{3}a$ ，则双曲线的方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3a^2} = 1$ ，

将点 $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ 的坐标代入双曲线的方程可得 $\frac{2}{a^2} - \frac{3}{3a^2} = \frac{1}{a^2} = 1$ ，解得 $a = 1$ ，故 $b = \sqrt{3}$ ，

因此，双曲线的方程为 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$. 故选：A.

6. $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是两个等差数列，其中 $\frac{a_k}{b_k} (1 \leq k \leq 5)$ 为常值， $a_1 = 288$ ， $a_5 = 96$ ， $b_1 = 192$ ，则 $b_3 =$ （ ）

- A. 64 B. 128 C. 256 D. 512

【思路分析】由已知条件求出 b_5 的值，利用等差中项的性质可求得 b_3 的值.

【解析】：由已知条件可得 $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_5}{b_5}$ ，则 $b_5 = \frac{a_5 b_1}{a_1} = \frac{96 \times 192}{288} = 64$ ，因此， $b_3 = \frac{b_1 + b_5}{2} = \frac{192 + 64}{2} = 128$.

故选：B.

7. 函数 $f(x) = \cos x - \cos 2x$ ，试判断函数的奇偶性及最大值（ ）

- A. 奇函数，最大值为 2 B. 偶函数，最大值为 2
C. 奇函数，最大值为 $\frac{9}{8}$ D. 偶函数，最大值为 $\frac{9}{8}$

【思路分析】由函数奇偶性的定义结合三角函数的性质可判断奇偶性；利用二倍角公式结合二次函数的性质可判断最大值.

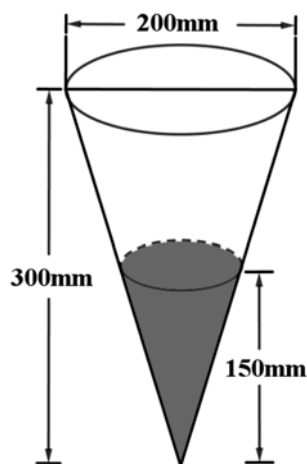
【解析】：由题意， $f(-x) = \cos(-x) - \cos(-2x) = \cos x - \cos 2x = f(x)$ ，所以该函数为偶函数，

$$\text{又 } f(x) = \cos x - \cos 2x = -2\cos^2 x + \cos x + 1 = -2\left(\cos x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{9}{8},$$

所以当 $\cos x = \frac{1}{4}$ 时， $f(x)$ 取最大值 $\frac{9}{8}$.

故选：D.

8. 定义：24 小时内降水在平地上积水厚度（mm）来判断降雨程度．其中小雨（<10mm），中雨（10mm-25mm），大雨（25mm-50mm），暴雨（50mm-100mm），小明用一个圆锥形容器接了 24 小时的水，如图，则这天降雨属于哪个等级（ ）



- A. 小雨 B. 中雨 C. 大雨 D. 暴雨

【思路分析】计算出圆锥体积，除以圆面的面积即可得降雨量，即可得解.

【解析】：由题意，一个半径为 $\frac{200}{2} = 100(\text{mm})$ 的圆面内的降雨充满一个底面半径为

$$\frac{200}{2} \times \frac{150}{300} = 50(\text{mm}), \text{ 高为 } 150(\text{mm}) \text{ 的圆锥,}$$

$$\text{所以积水厚度 } d = \frac{\frac{1}{3} \pi \times 50^2 \times 150}{\pi \times 100^2} = 12.5(\text{mm}), \text{ 属于中雨.}$$

故选：B.

9. 已知圆 $C: x^2 + y^2 = 4$ ，直线 $l: y = kx + m$ ，当 k 变化时， l 截得圆 C 弦长的最小值为 2，则 $m = (\quad)$

- A. ± 2 B. $\pm \sqrt{2}$ C. $\pm \sqrt{3}$ D. $\pm \sqrt{5}$

【思路分析】先求得圆心到直线距离，即可表示出弦长，根据弦长最小值得出 m

【解析】：由题可得圆心为 $(0,0)$ ，半径为 2，

$$\text{则圆心到直线的距离 } d = \frac{|m|}{\sqrt{k^2 + 1}},$$

$$\text{则弦长为 } 2\sqrt{4 - \frac{m^2}{k^2 + 1}},$$

则当 $k = 0$ 时，弦长取得最小值为 $2\sqrt{4 - m^2} = 2$ ，解得 $m = \pm \sqrt{3}$. 故选：C.

10. 数列 $\{a_n\}$ 是递增的整数数列, 且 $a_1 \geq 3$, $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 100$, 则 n 的最大值为 ()

A. 9

B. 10

C. 11

D. 12

【思路分析】使数列首项、递增幅度均最小, 结合等差数列的通项及求和公式即可得解.

【解析】: 若要使 n 尽可能的大, 则 a_1 , 递增幅度要尽可能小,

不妨设数列 $\{a_n\}$ 是首项为 3, 公差为 1 的等差数列, 其前 n 项和为 S_n ,

$$\text{则 } a_n = n + 2, S_{11} = \frac{3+13}{2} \times 11 = 88 < 100, S_{12} = \frac{3+14}{2} \times 12 = 102 > 100,$$

所以 n 的最大值为 11. 故选: C.

二、填空题: 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分.

11. $(x^3 - \frac{1}{x})^4$ 展开式中常数项为_____.

【解析】: 试题分析: $(x^3 - \frac{1}{x})^4$ 的展开式的通项 $T_{r+1} = C_4^r (x^3)^{4-r} \left(-\frac{1}{x}\right)^r = (-1)^r C_4^r x^{12-4r}$, 令 $r = 3$ 得常数项为 $T_4 = (-1)^3 C_4^3 = -4$.

12. 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$, 焦点为 F , 点 M 为抛物线 C 上的点, 且 $|FM| = 6$, 则 M 的横坐标是_____; 作 $MN \perp x$ 轴于 N , 则 $S_{\triangle FMN} =$ _____.

【思路分析】根据焦半径公式可求 M 的横坐标, 求出纵坐标后可求 $S_{\triangle FMN}$.

【解析】: 因为抛物线的方程为 $y^2 = 4x$, 故 $p = 2$ 且 $F(1, 0)$.

因为 $|MF| = 6$, $x_M + \frac{p}{2} = 6$, 解得 $x_M = 5$, 故 $y_M = \pm 2\sqrt{5}$,

所以 $S_{\triangle FMN} = \frac{1}{2} \times (5-1) \times 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$, 故答案为: 5, $4\sqrt{5}$.

13. $\vec{a} = (2, 1)$, $\vec{b} = (2, -1)$, $\vec{c} = (0, 1)$, 则 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} =$ _____; $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ _____.

【思路分析】根据坐标求出 $\vec{a} + \vec{b}$, 再根据数量积的坐标运算直接计算即可.

【解析】: $\because \vec{a} = (2, 1), \vec{b} = (2, -1), \vec{c} = (0, 1)$,

$\therefore \vec{a} + \vec{b} = (4, 0)$, $\therefore (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = 4 \times 0 + 0 \times 1 = 0$,

$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 2 + 1 \times (-1) = 3$. 故答案为: 0; 3.

14. 若点 $P(\cos \theta, \sin \theta)$ 与点 $Q(\cos(\theta + \frac{\pi}{6}), \sin(\theta + \frac{\pi}{6}))$ 关于 y 轴对称, 写出一个符合题意的 $\theta =$ _____.

【思路分析】根据 P, Q 在单位圆上, 可得 $\theta, \theta + \frac{\pi}{6}$ 关于 y 轴对称, 得出 $\theta + \frac{\pi}{6} + \theta = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 求解.

【解析】: $\because P(\cos \theta, \sin \theta)$ 与 $Q(\cos(\theta + \frac{\pi}{6}), \sin(\theta + \frac{\pi}{6}))$ 关于 y 轴对称,

即 $\theta, \theta + \frac{\pi}{6}$ 关于 y 轴对称, $\theta + \frac{\pi}{6} + \theta = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 则 $\theta = k\pi + \frac{5\pi}{12}, k \in \mathbb{Z}$,

当 $k = 0$ 时, 可取 θ 的一个值为 $\frac{5\pi}{12}$.

故答案为: $\frac{5\pi}{12}$ (满足 $\theta = k\pi + \frac{5\pi}{12}, k \in \mathbb{Z}$ 即可).

15. 已知函数 $f(x) = |\lg x| - kx - 2$, 给出下列四个结论:

①若 $k = 0$, 则 $f(x)$ 有两个零点; ② $\exists k < 0$, 使得 $f(x)$ 有一个零点;

③ $\exists k < 0$, 使得 $f(x)$ 有三个零点; ④ $\exists k > 0$, 使得 $f(x)$ 有三个零点.

以上正确结论得序号是_____.

【思路分析】由 $f(x) = 0$ 可得出 $|\lg x| = kx + 2$, 考查直线 $y = kx + 2$ 与曲线 $g(x) = |\lg x|$ 的左、右支分别相切的情形, 利用方程思想以及数形结合可判断各选项的正误.

【解析】: 对于①, 当 $k = 0$ 时, 由 $f(x) = |\lg x| - 2 = 0$, 可得 $x = \frac{1}{100}$ 或 $x = 100$, ①正确;

对于②, 考查直线 $y = kx + 2$ 与曲线 $y = -\lg x (0 < x < 1)$ 相切于点 $P(t, -\lg t)$,

$$\text{对函数 } y = -\lg x \text{ 求导得 } y' = -\frac{1}{x \ln 10}, \text{ 由题意可得 } \begin{cases} kt + 2 = -\lg t \\ k = -\frac{1}{t \ln 10} \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} t = \frac{e}{100} \\ k = -\frac{100}{e} \lg e \end{cases},$$

所以, 存在 $k = -\frac{100}{e} \lg e < 0$, 使得 $f(x)$ 只有一个零点, ②正确;

对于③, 当直线 $y = kx + 2$ 过点 $(1, 0)$ 时, $k + 2 = 0$, 解得 $k = -2$,

所以, 当 $-\frac{100}{e} \lg e < k < -2$ 时, 直线 $y = kx + 2$ 与曲线 $y = -\lg x (0 < x < 1)$ 有两个交点,

若函数 $f(x)$ 有三个零点, 则直线 $y = kx + 2$ 与曲线 $y = -\lg x (0 < x < 1)$ 有两个交点,

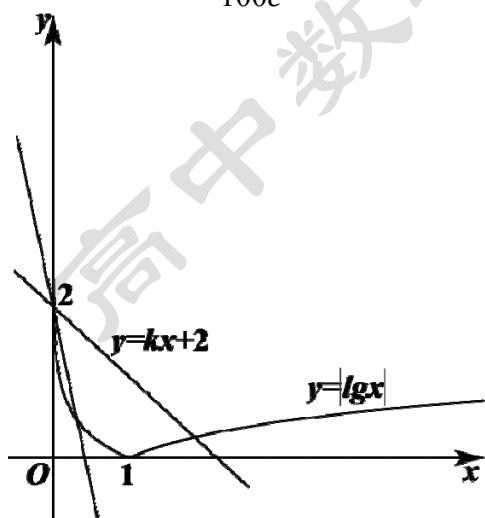
直线 $y = kx + 2$ 与曲线 $y = \lg x (x > 1)$ 有一个交点, 所以, $\begin{cases} -\frac{100}{e} \lg e < k < -2 \\ k + 2 > 0 \end{cases}$, 此不等式无解,

因此, 不存在 $k < 0$, 使得函数 $f(x)$ 有三个零点, ③错误;

对于④, 考查直线 $y = kx + 2$ 与曲线 $y = \lg x (x > 1)$ 相切于点 $P(t, \lg t)$,

$$\text{对函数 } y = \lg x \text{ 求导得 } y' = \frac{1}{x \ln 10}, \text{ 由题意可得 } \begin{cases} kt + 2 = \lg t \\ k = \frac{1}{t \ln 10} \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} t = 100e \\ k = \frac{\lg e}{100e} \end{cases},$$

所以, 当 $0 < k < \frac{\lg e}{100e}$ 时, 函数 $f(x)$ 有三个零点, ④正确.



故答案为: ①②④.

【归纳总结】已知函数的零点或方程的根的情况, 求解参数的取值范围问题的本质都是研究函数的零点问题, 求解此类问题的一般步骤:

- (1) 转化, 即通过构造函数, 把问题转化成所构造函数的零点问题;
 (2) 列式, 即根据函数的零点存在定理或结合函数的图象列出关系式;
 (3) 得解, 即由列出的式子求出参数的取值范围.

三、解答题: 共 6 小题, 共 85 分, 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

16. 已知在 $\triangle ABC$ 中, $c = 2b \cos B$, $C = \frac{2\pi}{3}$.

(1) 求 B 的大小;

(2) 在下列三个条件中选择一个作为已知, 使 $\triangle ABC$ 存在且唯一确定, 并求出 BC 边上的中线的长度.

① $c = \sqrt{2}b$; ② 周长为 $4 + 2\sqrt{3}$; ③ 面积为 $S_{\triangle ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$;

【思路分析】(1) 由正弦定理化边为角即可求解;

(2) 若选择①: 由正弦定理求解可得不存在;

若选择②: 由正弦定理结合周长可求得外接圆半径, 即可得出各边, 再由余弦定理可求;

若选择③: 由面积公式可求各边长, 再由余弦定理可求.

【解析】(1) $\because c = 2b \cos B$, 则由正弦定理可得 $\sin C = 2 \sin B \cos B$,

$\therefore \sin 2B = \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\because C = \frac{2\pi}{3}$, $\therefore B \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$, $2B \in \left(0, \frac{2\pi}{3}\right)$, $\therefore 2B = \frac{\pi}{3}$, 解得 $B = \frac{\pi}{6}$;

(2) 若选择①: 由正弦定理结合 (1) 可得 $\frac{c}{b} = \frac{\sin C}{\sin B} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$,

与 $c = \sqrt{2}b$ 矛盾, 故这样的 $\triangle ABC$ 不存在;

若选择②: 由 (1) 可得 $A = \frac{\pi}{6}$, 设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R ,

则由正弦定理可得 $a = b = 2R \sin \frac{\pi}{6} = R$, $c = 2R \sin \frac{2\pi}{3} = \sqrt{3}R$,

则周长 $a + b + c = 2R + \sqrt{3}R = 4 + 2\sqrt{3}$, 解得 $R = 2$, 则 $a = 2, c = 2\sqrt{3}$,

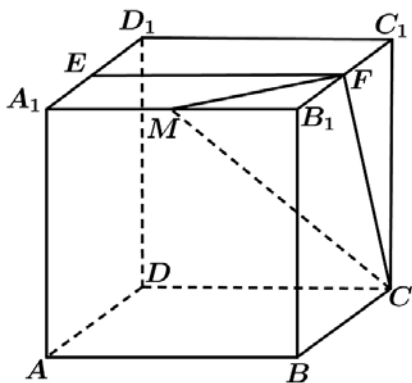
由余弦定理可得 BC 边上的中线的长度为: $\sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 1^2 - 2 \times 2\sqrt{3} \times 1 \times \cos \frac{\pi}{6}} = \sqrt{7}$;

若选择③: 由 (1) 可得 $A = \frac{\pi}{6}$, 即 $a = b$, 则 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}a^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$, 解得 $a = \sqrt{3}$,

则由余弦定理可得 BC 边上的中线的长度为:

$\sqrt{b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 \times b \times \frac{a}{2} \times \cos \frac{2\pi}{3}} = \sqrt{3 + \frac{3}{4} + \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{21}}{2}$.

17. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$, 点 E 为 A_1D_1 中点, 直线 B_1C_1 交平面 CDE 于点 F .

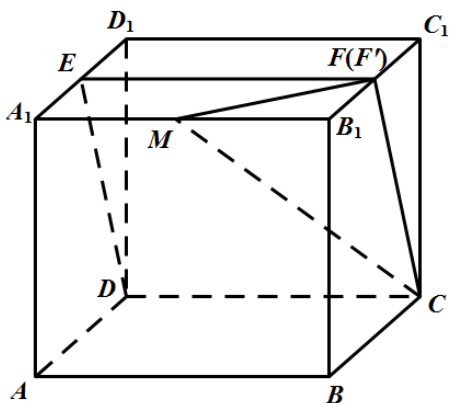


(1) 证明: 点 F 为 B_1C_1 的中点;

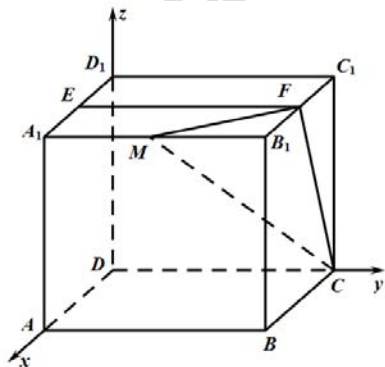
(2) 若点 M 为棱 A_1B_1 上一点, 且二面角 $M-CF-E$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$, 求 $\frac{A_1M}{A_1B_1}$ 的值.

【思路分析】(1) 首先将平面 CDE 进行扩展, 然后结合所得的平面与直线 B_1C_1 的交点即可证得题中的结论;
(2) 建立空间直角坐标系, 利用空间直角坐标系求得相应平面的法向量, 然后解方程即可求得实数 λ 的值.

【解析】：(1)如图所示，取 B_1C_1 的中点 F' ，连结 $DE, EF', F'C$ ，
由于 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 为正方体， E, F' 为中点，故 $EF' \parallel CD$ ，
从而 E, F', C, D 四点共面，即平面 CDE 即平面 $CDEF'$ ，
据此可得：直线 B_1C_1 交平面 CDE 于点 F' ，
当直线与平面相交时只有唯一的交点，故点 F 与点 F' 重合，
即点 F 为 B_1C_1 中点。



(2)以点 D 为坐标原点, DA, DC, DD_1 方向分别为 x 轴, y 轴, z 轴正方向, 建立空间直角坐标系 $D-xyz$,



不妨设正方体的棱长为 2, 设 $\frac{A_1M}{A_1B_1} = \lambda (0 \leq \lambda \leq 1)$,

则: $M(2, 2\lambda, 2), C(0, 2, 0), F(1, 2, 2), E(1, 0, 2),$

从而: $\overrightarrow{MC} = (-2, 2-2\lambda, -2)$, $\overrightarrow{CF} = (1, 0, 2)$, $\overrightarrow{FE} = (0, -2, 0)$,

设平面 MCF 的法向量为: $\vec{m} = (x_1, y_1, z_1)$, 则:

$$\begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{MC} = -2x_1 + (2-2\lambda)y_1 - 2z_1 = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{CF} = x_1 + 2z_1 = 0 \end{cases},$$

令 $z_1 = -1$ 可得: $\vec{m} = \left(2, \frac{1}{1-\lambda}, -1\right)$,

设平面 CFE 的法向量为: $\vec{n} = (x_2, y_2, z_2)$, 则:

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{FE} = -2y_2 = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{CF} = x_2 + 2z_2 = 0 \end{cases},$$

令 $z_2 = -1$ 可得: $\vec{n} = (2, 0, -1)$,

从而: $\vec{m} \cdot \vec{n} = 5$, $|\vec{m}| = \sqrt{5 + \left(\frac{1}{1-\lambda}\right)^2}$, $|\vec{n}| = \sqrt{5}$,

$$\text{则: } \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \times |\vec{n}|} = \frac{5}{\sqrt{5 + \left(\frac{1}{1-\lambda}\right)^2} \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{3},$$

整理可得: $(\lambda-1)^2 = \frac{1}{4}$, 故 $\lambda = \frac{1}{2}$ ($\lambda = \frac{3}{2}$ 舍去).

【归纳总结】本题考查了立体几何中的线面关系和二面角的求解问题, 意在考查学生的空间想象能力和逻辑推理能力, 对于立体几何中角的计算问题, 往往可以利用空间向量法, 通过求解平面的法向量, 利用向量的夹角公式求解.

18. 为加快新冠肺炎检测效率, 某检测机构采取“ k 合1检测法”, 即将 k 个人的拭子样本合并检测, 若为阴性, 则可以确定所有样本都是阴性的; 若为阳性, 则还需要对本组的每个人再做检测. 现有 100 人, 已知其中 2 人感染病毒.

(1) ①若采用“10合1检测法”, 且两名患者在同一组, 求总检测次数;

②已知 10 人分成一组, 分 10 组, 两名感染患者在同一组的概率为 $\frac{1}{11}$, 定义随机变量 X 为总检测次数, 求检测次数 X 的分布列和数学期望 $E(X)$;

(2) 若采用“5合1检测法”, 检测次数 Y 的期望为 $E(Y)$, 试比较 $E(X)$ 和 $E(Y)$ 的大小(直接写出结果).

【思路分析】(1) ①由题设条件还原情境, 即可得解;

②求出 X 的取值情况, 求出各情况下的概率, 进而可得分布列, 再由期望的公式即可得解;

(2) 求出两名感染者在一组的概率, 进而求出 $E(Y)$, 即可得解.

【解析】(1) ①对每组进行检测, 需要 10 次; 再对结果为阳性的组每个人进行检测, 需要 10 次; 所以总检测次数为 20 次;

②由题意, 两名患者在同一组需检测 20 次, 不在同一组需检测 30 次, 所以 X 可以取 20, 30,

$$P(X=20) = \frac{1}{11}, \quad P(X=30) = 1 - \frac{1}{11} = \frac{10}{11},$$

则 X 的分布列:

X	20	30
-----	----	----

P	$\frac{1}{11}$	$\frac{10}{11}$
-----	----------------	-----------------

$$\text{所以 } E(X) = 20 \times \frac{1}{11} + 30 \times \frac{10}{11} = \frac{320}{11};$$

(2) 由题意, 两名患者在同一组需检测 25 次, 不在同一组需检测 30 次, Y 可以取 25, 30,

$$\text{两名感染者在同一组的概率为 } P_1 = \frac{C_{20}^1 C_{98}^2 C_{98}^3}{C_{100}^5} = \frac{4}{99}, \text{ 不在同一组的概率为 } P_1 = \frac{95}{99},$$

$$\text{则 } E(Y) = 25 \times \frac{4}{99} + 30 \times \frac{95}{99} = \frac{2950}{99} > E(X).$$

$$19. \text{ 已知函数 } f(x) = \frac{3-2x}{x^2+a}.$$

(1) 若 $a=0$, 求 $y=f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处切线方程;

(2) 若函数 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极值, 求 $f(x)$ 的单调区间, 以及最大值和最小值.

【思路分析】(1) 求出 $f(1)$ 、 $f'(1)$ 的值, 利用点斜式可得出所求切线的方程;

(2) 由 $f'(-1)=0$ 可求得实数 a 的值, 然后利用导数分析函数 $f(x)$ 的单调性与极值, 由此可得出结果.

$$\text{【解析】: (1) 当 } a=0 \text{ 时, } f(x) = \frac{3-2x}{x^2}, \text{ 则 } f'(x) = \frac{2(x-3)}{x^3}, \therefore f(1)=1, f'(1)=-4,$$

此时, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y-1=-4(x-1)$, 即 $4x+y-5=0$;

$$(2) \text{ 因为 } f(x) = \frac{3-2x}{x^2+a}, \text{ 则 } f'(x) = \frac{-2(x^2+a)-2x(3-2x)}{(x^2+a)^2} = \frac{2(x^2-3x-a)}{(x^2+a)^2},$$

$$\text{由题意可得 } f'(-1) = \frac{2(4-a)}{(a+1)^2} = 0, \text{ 解得 } a=4,$$

$$\text{故 } f(x) = \frac{3-2x}{x^2+4}, f'(x) = \frac{2(x+1)(x-4)}{(x^2+4)^2}, \text{ 列表如下:}$$

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 4)$	4	$(4, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	增	极大值	减	极小值	增

所以, 函数 $f(x)$ 的增区间为 $(-\infty, -1)$ 、 $(4, +\infty)$, 单调递减区间为 $(-1, 4)$.

当 $x < \frac{3}{2}$ 时, $f(x) > 0$; 当 $x > \frac{3}{2}$ 时, $f(x) < 0$.

$$\text{所以, } f(x)_{\max} = f(-1) = 1, f(x)_{\min} = f(4) = -\frac{1}{4}.$$

$$20. \text{ 已知椭圆 } E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0) \text{ 过点 } A(0, -2), \text{ 以四个顶点围成的四边形面积为 } 4\sqrt{5}.$$

(1) 求椭圆 E 的标准方程;

(2) 过点 $P(0, -3)$ 的直线 l 斜率为 k , 交椭圆 E 于不同的两点 B, C , 直线 AB, AC 交 $y=-3$ 于点 M, N , 直线 AC 交 $y=-3$ 于点 N , 若 $|PM|+|PN| \leq 15$, 求 k 的取值范围.

【思路分析】(1) 根据椭圆所过的点及四个顶点围成的四边形的面积可求 a, b , 从而可求椭圆的标准方程.

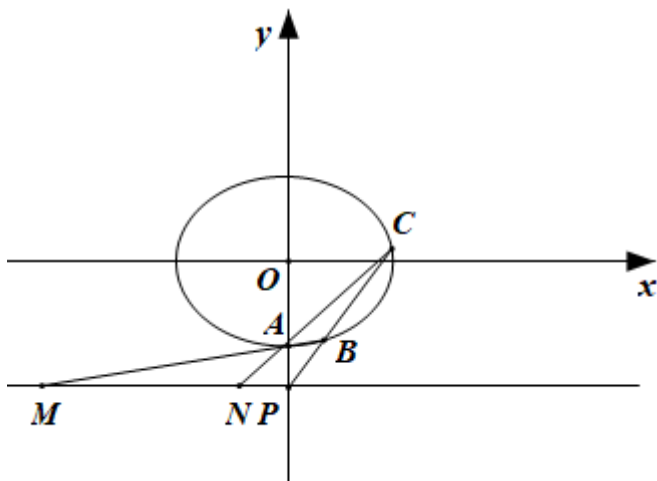
(2) 设 $B(x_1, y_1), C(x_2, y_2)$, 求出直线 AB, AC 的方程后可得 M, N 的横坐标, 从而可得 $|PM| + |PN|$, 联立直线 BC 的方程和椭圆的方程, 结合韦达定理化简 $|PM| + |PN|$, 从而可求 k 的范围, 注意判别式的要求.

【解析】: (1) 因为椭圆过 $A(0, -2)$, 故 $b = 2$,

因为四个顶点围成的四边形的面积为 $4\sqrt{5}$, 故 $\frac{1}{2} \times 2a \times 2b = 4\sqrt{5}$, 即 $a = \sqrt{5}$,

故椭圆的标准方程为: $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$.

(2)



设 $B(x_1, y_1), C(x_2, y_2)$,

因为直线 BC 的斜率存在, 故 $x_1 x_2 \neq 0$,

故直线 $AB: y = \frac{y_1 + 2}{x_1}x - 2$, 令 $y = -3$, 则 $x_M = -\frac{x_1}{y_1 + 2}$, 同理 $x_N = -\frac{x_2}{y_2 + 2}$.

直线 $BC: y = kx - 3$, 由 $\begin{cases} y = kx - 3 \\ 4x^2 + 5y^2 = 20 \end{cases}$ 可得 $(4 + 5k^2)x^2 - 30kx + 25 = 0$,

故 $\Delta = 900k^2 - 100(4 + 5k^2) > 0$, 解得 $k < -1$ 或 $k > 1$.

又 $x_1 + x_2 = \frac{30k}{4 + 5k^2}$, $x_1 x_2 = \frac{25}{4 + 5k^2}$, 故 $x_1 x_2 > 0$, 所以 $x_M x_N > 0$

又 $|PM| + |PN| = |x_M + x_N| = \left| \frac{x_1}{y_1 + 2} + \frac{x_2}{y_2 + 2} \right|$

$$= \left| \frac{x_1}{kx_1 - 1} + \frac{x_2}{kx_2 - 1} \right| = \left| \frac{2kx_1 x_2 - (x_1 + x_2)}{k^2 x_1 x_2 - k(x_1 + x_2) + 1} \right| = \left| \frac{\frac{50k}{4 + 5k^2} - \frac{30k}{4 + 5k^2}}{\frac{25k^2}{4 + 5k^2} - \frac{30k^2}{4 + 5k^2} + 1} \right| = 5|k|$$

故 $5|k| \leq 15$ 即 $|k| \leq 3$,

综上, $-3 \leq k < -1$ 或 $1 < k \leq 3$.

21. 定义 R_p 数列 $\{a_n\}$: 对实数 p , 满足: ① $a_1 + p \geq 0$, $a_2 + p = 0$; ② $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_{4n-1} < a_{4n}$; ③

$a_{m+n} \in \{a_m + a_n + p, a_m + a_n + p + 1\}$, $m, n \in \mathbb{N}^*$.

(1) 对于前 4 项 2, -2, 0, 1 的数列, 可以是 R_2 数列吗? 说明理由;

(2) 若 $\{a_n\}$ 是 R_0 数列, 求 a_5 的值;

(3) 是否存在 p , 使得存在 R_p 数列 $\{a_n\}$, 对 $\forall n \in N^*, S_n \geq S_{10}$? 若存在, 求出所有这样的 p ; 若不存在, 说明理由.

【思路分析】(1)由题意考查 a_3 的值即可说明数列不是 R_2 数列;

(2)由题意首先确定数列的前 4 项, 然后讨论计算即可确定 a_5 的值;

(3)构造数列 $b_n = a_n + p$, 易知数列 $\{b_n\}$ 是 R_0 的, 结合(2)中的结论求解不等式即可确定满足题意的实数 p 的值.

【解析】:(1)由性质③结合题意可知 $0 = a_3 \in \{a_1 + a_2 + 2, a_1 + a_2 + 2 + 1\} = \{2, 3\}$, 矛盾, 故前 4 项 $2, -2, 0, 1$ 的数列, 不可能是 R_2 数列.

(2)性质① $a_1 \geq 0, a_2 = 0$,

由性质③ $a_{m+2} \in \{a_m, a_m + 1\}$, 因此 $a_3 = a_1$ 或 $a_3 = a_1 + 1$, $a_4 = 0$ 或 $a_4 = 1$,

若 $a_4 = 0$, 由性质②可知 $a_3 < a_4$, 即 $a_1 < 0$ 或 $a_1 + 1 < 0$, 矛盾;

若 $a_4 = 1, a_3 = a_1 + 1$, 由 $a_3 < a_4$ 有 $a_1 + 1 < 1$, 矛盾.

因此只能是 $a_4 = 1, a_3 = a_1$.

又因为 $a_4 = a_1 + a_3$ 或 $a_4 = a_1 + a_3 + 1$, 所以 $a_1 = \frac{1}{2}$ 或 $a_1 = 0$.

若 $a_1 = \frac{1}{2}$, 则 $a_2 = a_{1+1} \in \{a_1 + a_1 + 0, a_1 + a_1 + 0 + 1\} = \{2a_1, 2a_1 + 1\} = \{1, 2\}$,

不满足 $a_2 = 0$, 舍去.

当 $a_1 = 0$, 则 $\{a_n\}$ 前四项为: $0, 0, 0, 1$,

下面用纳法证明 $a_{4n+i} = n(i=1, 2, 3), a_{4n+4} = n+1 (n \in N)$:

当 $n=0$ 时, 经验证命题成立, 假设当 $n \leq k (k \geq 0)$ 时命题成立,

当 $n=k+1$ 时:

若 $i=1$, 则 $a_{4(k+1)+1} = a_{4k+5} = a_{j+(4k+5-j)}$, 利用性质③:

$\{a_j + a_{4k+5-j} | j \in N^*, 1 \leq j \leq 4k+4\} = \{k, k+1\}$, 此时可得: $a_{4k+5} = k+1$;

否则, 若 $a_{4k+5} = k$, 取 $k=0$ 可得: $a_5 = 0$,

而由性质②可得: $a_5 = a_1 + a_4 \in \{1, 2\}$, 与 $a_5 = 0$ 矛盾.

同理可得:

$\{a_j + a_{4k+6-j} | j \in N^*, 1 \leq j \leq 4k+5\} = \{k, k+1\}$, 有 $a_{4k+6} = k+1$;

$\{a_j + a_{4k+8-j} | j \in N^*, 2 \leq j \leq 4k+6\} = \{k+1, k+2\}$, 有 $a_{4k+8} = k+2$;

$\{a_j + a_{4k+7-j} | j \in N^*, 1 \leq j \leq 4k+6\} = \{k+1\}$, 又因为 $a_{4k+7} < a_{4k+8}$, 有 $a_{4k+7} = k+1$.

即当 $n=k+1$ 时命题成立, 证毕.

综上可得: $a_1 = 0, a_5 = a_{4 \times 1 + 1} = 1$.

(3)令 $b_n = a_n + p$, 由性质③可知:

$\forall m, n \in N^*, b_{m+n} = a_{m+n} + p \in \{a_m + p + a_n + p, a_m + p + a_n + p + 1\} = \{b_m + b_n, b_m + b_n + 1\}$,

由于 $b_1 = a_1 + p \geq 0, b_2 = a_2 + p = 0, b_{4n-1} = a_{4n-1} + p < a_{4n} + p = b_{4n}$,

因此数列 $\{b_n\}$ 为 R_0 数列.

由 (2) 可知:

若 $\forall n \in N, a_{4n+i} = n - p (i=1, 2, 3), a_{4n+4} = n+1 - p$;

$$S_{11} - S_{10} = a_{11} = a_{4 \times 2 + 3} = 2 - p \geq 0, \quad S_9 - S_{10} = -a_{10} = -a_{4 \times 2 + 2} = -(2 - p) \geq 0,$$

因此 $p = 2$, 此时 $a_1, a_2, \dots, a_{10} \leq 0, a_j \geq 0 (j \geq 11)$, 满足题意.

【归纳总结】本题属于数列中的“新定义问题”，“新定义”主要是指即时定义新概念、新公式、新定理、新法则、新运算五种，然后根据此新定义去解决问题，有时还需要用类比的方法去理解新的定义，这样有助于对新定义的透彻理解.但是，透过现象看本质，它们考查的还是基础数学知识，所以说“新题”不一定是“难题”，掌握好三基，以不变应万变才是制胜法宝.

《初高中数学教研微信系列群》简介：

目前有 15 个群 (13 个高中群, 2 个初中群), 共 5000 多优秀、特、高级教师, 省、市、区县教研员、教辅公司数学编辑、报刊杂志高中数学编辑等汇聚而成, 是一个围绕高中数学教学研究展开教研活动的微信群.

宗旨：脚踏实地、不口号、不花哨、接地气的高中数学教研！

特别说明：

1. 本系列群只探讨高中数学教学研究、高中数学试题研究等相关话题；
2. 由于本群是集“研究—写作—发表（出版）”于一体的“桥梁”，涉及业务合作，特强调真诚交流，入群后立即群名片：

教师格式：省+市+真实姓名，如：四川成都张三

编辑格式：公司或者刊物（简写）+真实姓名

欢迎各位老师邀请你身边热爱高中数学教研（不喜欢研究的谢绝）的教师好友（学生谢绝）加入，大家共同研究，共同提高！

群主二维码：见右图

