江苏省仪征中学2020届高三下学期数学周三限时训练6附加

数学附加题

本试卷共40分，考试时间30分钟．

21．【选做题】本题包括A，B，C三小题，请选定其中两题作答，每小题10分共计20分，解答时应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

A．选修4—2：矩阵与变换

已知矩阵A＝$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ a & 0 \end{bmatrix}$，$a\in$R．若点P(1，1)在矩阵A的变换下得到点P′(0，－2)．

（1）求矩阵A；

（2）求点Q(0，3)经过矩阵A的2次变换后对应点Q′的坐标．

22．选修4—4：坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为$\begin{cases} x=1+\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases}$（$\theta$为参数），直线 l 的参数方程为$\begin{cases} x=\sqrt{3}t \\ y=1+t \end{cases}$（t为参数），求曲线C上的点到直线$l$的距离的最大值．

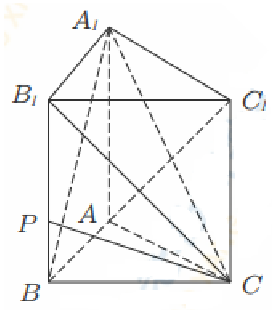
【必做题】第 22 题、第 23 题，每题 10 分，共计 20 分，解答时应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

23．（本小题满分 10 分）

如图，在直三棱柱中 ABC—$A_1B_1C_1$，AB⊥AC，AB＝3，AC＝4，B_1C⊥AC_1．

（1）求 AA_1 的长；

（2）试判断在侧棱 BB_1 上是否存在点 P，使得直线 PC 与平面 AA_1C_1C 所成角和二面角 B—A_1C—A 的大小相等，并说明理由．



24．（本小题满分 10 分）

口袋中有大小、形状、质地相同的两个白球和三个黑球．现有一抽奖游戏规则如下：抽奖者每次有放回的从口袋中随机取出一个球，最多取球 $2n+1(n\in \mathbf{N}^*)$次．若取出白球的累计次数达到 $n+1$ 时，则终止取球且获奖，其它情况均不获奖．记获奖概率为 P_n．

（1）求 P_1；

（2）证明：$P_{n+1}<P_n$．

江苏省仪征中学 2020 届高三下学期数学周三限时训练 6 附加

数学附加题

本试卷共 40 分，考试时间 30 分钟．

21．【选做题】本题包括 A，B，C 三小题，请选定其中两题作答，每小题 10 分共计 20 分，解答时应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

A．选修 4—2：矩阵与变换

已知矩阵 A＝$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ a & 0 \end{bmatrix}$，$a\in$R．若点 P(1，1)在矩阵 A 的变换下得到点 P′(0，－2)．

（1）求矩阵 A；

（2）求点 Q(0，3)经过矩阵 A 的 2 次变换后对应点 Q′的坐标．

解：(1) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ a & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix}$.

因为点 P(1，1)在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的变换下得到点 P'(0，－2)，所以 a＝－2，

所以 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$.

(2)因为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$，所以 $\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$,

所以 $\boldsymbol{A}^2\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix}$,

所以，点 Q'的坐标为(－3，6)．

B．选修 4—4：坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=1+\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases}$ （θ 为参数），直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=\sqrt{3}t \\ y=1+t \end{cases}$ （t 为参数），求曲线 C 上的点到直线 l 的距离的最大值．

解：曲线 C：$(x-1)^2+y^2=1$，直线 l：$x-\sqrt{3}y+\sqrt{3}=0$

圆心 C(1，0)到 l 的距离设为 d，$d=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

故曲线 C 上的点到直线 l 的距离的最大值为$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}+1$，即$\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$.

C．选修 4—5：不等式选讲

已知 a，b 为非负实数，求证：$a^3+b^3\geq\sqrt{ab}(a^2+b^2)$.

证明：因为 a，b 为非负实数，

$$a^3+b^3-\sqrt{ab}(a^2+b^2)=a^2\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{b})+b^2\sqrt{b}(\sqrt{b}-\sqrt{a})$$

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})[(\sqrt{a})^5-(\sqrt{b})^5]$$

若 $a\geq b$ 时，$\sqrt{a}\geq\sqrt{b}$，从而$(\sqrt{a})^5\geq(\sqrt{b})^5$，

得$(\sqrt{a}-\sqrt{b})[(\sqrt{a})^5-(\sqrt{b})^5]\geq 0$，

若 $a<b$ 时，$\sqrt{a}<\sqrt{b}$，从而$(\sqrt{a})^5<(\sqrt{b})^5$，

得$(\sqrt{a}-\sqrt{b})[(\sqrt{a})^5-(\sqrt{b})^5]>0$，

综上，$a^3+b^3\geq\sqrt{ab}(a^2+b^2)$.

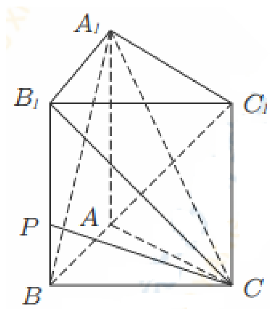
【必做题】第 22 题、第 23 题，每题 10 分，共计 20 分，解答时应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

22.（本小题满分 10 分）

如图，在直三棱柱中 ABC—$A_1B_1C_1$，AB⊥AC，AB＝3，AC＝4，B_1C⊥AC_1.

（1）求 AA_1 的长；

（2）试判断在侧棱 BB_1 上是否存在点 P，使得直线 PC 与平面 AA_1C_1C 所成角和二面角 B—A_1C—A 的大小相等，并说明理由.



解：（1）直三棱柱 ABC—$A_1B_1C_1$ 中，AA_1⊥平面 ABC，

又 AB，AC⊂平面 ABC，故 AA_1⊥AB，AA_1⊥AC，又 AB⊥AC

故以 A 为原点，{$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AA_1}$}为正交基底建立空间直角坐标系

设 AA_1＝a＞0，则 $A_1(0，0，a)$，$C(0，4，0)$，$B_1(3，0，a)$，$C_1(0，4，a)$，

$\overrightarrow{B_1C}$＝(－3，4，－a)，$\overrightarrow{AC_1}$＝(0，4，a)

因为$B_1C\perp AC_1$，故$\overrightarrow{B_1C}\cdot\overrightarrow{AC_1}$=0，即$16-a^2=0$，

又a＞0，故a＝4，即AA_1的长为4;

（2）由（1）知：B(3，0，0)，B_1(3，0，4)，假设存在，

设$\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BB_1}$=(0，0，4$\lambda$)，$\lambda\in(0,1)$，

则P(3，0，4λ)，则$\overrightarrow{CP}$＝(3，－4，4λ)

$AB\perp AC$，$AB\perp AA_1$，又$AC\cap AA_1$＝A，AC，$AA_1\subset$平面AA_1C_1C

所以$AB\perp$平面AA_1C_1C，故平面AA_1C_1C的法向量为$\overrightarrow{AB}$＝(3，0，0)

设PC与平面AA_1C_1C所成角为α，则$\sin\alpha=\left|\cos<\overrightarrow{CP},\overrightarrow{AB}>\right|=\dfrac{3}{\sqrt{16\lambda^2+25}}$，

设平面BA_1C的法向量为$\vec{n}$＝(x，y，z)，平面AA_1C的法向量为$\overrightarrow{AB}$＝(3，0，0)

由（1）知：$\overrightarrow{A_1C}$＝(0，4，－4)，$\overrightarrow{BC}$＝(－3，4，0)，$\overrightarrow{AC}$＝(0，4，0)，

$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=-3x+4y=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1C}=4y-4z=0\end{cases}$，令$y=3$，则$\vec{n}$＝(4，3，3)

设二面角$B—A_1C—A$的大小为β，则$\cos\beta=\left|\cos<\vec{n},\overrightarrow{AB}>\right|=\dfrac{4}{\sqrt{34}}$，

因为$\alpha=\beta$，则$\sin^2\alpha+\cos^2\beta=\dfrac{9}{16\lambda^2+25}+\dfrac{8}{17}=1$，无解，

故侧棱BB_1上不存在符合题意的点P.

23.（本小题满分10分）

口袋中有大小、形状、质地相同的两个白球和三个黑球．现有一抽奖游戏规则如下：抽奖者每次有放回的从口袋中随机取出一个球，最多取球 $2n$＋1($n\in\mathrm{N}^*$)次．若取出白球的累计次数达到n＋1时，则终止取球且获奖，其它情况均不获奖．记获奖概率为P_n．

（1）求P_1；

（2）证明：$P_{n+1}<P_n$．

解：（1）根据题意，每次取出的球是白球的概率为$\dfrac{2}{5}$，取出的球是黑球的概率为$\dfrac{3}{5}$，

所以$P_1=\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}+C_2^1\times(\frac{2}{5})^2\times\frac{3}{5}=\frac{44}{125}$；

（2）证明：累计取出白球次数是 n +1 的情况有：

前 n 次取出 n 次白球，第 n +1 次取出的是白球，概率为$C_n^n\times(\frac{2}{5})^{n+1}$

前 n+1 次取出 n 次白球，第 n +2 次取出的是白球，概率为$C_{n+1}^n\times(\frac{2}{5})^{n+1}\times\frac{3}{5}$

前 2n－1 次取出 n 次白球，第 2n 次取出的是白球，概率为$C_{2n-1}^n\times(\frac{2}{5})^{n+1}\times(\frac{3}{5})^{n-1}$

前 2n 次取出 n 次白球，第 2n +1 次取出的是白球，概率为$C_{2n}^n\times(\frac{2}{5})^{n+1}\times(\frac{3}{5})^n$

则$P_n=C_n^n\times(\frac{2}{5})^{n+1}+C_{n+1}^n\times(\frac{2}{5})^{n+1}\times\frac{3}{5}+\cdots+C_{2n-1}^n\times(\frac{2}{5})^{n+1}\times(\frac{3}{5})^{n-1}+$

$C_{2n}^n\times(\frac{2}{5})^{n+1}\times(\frac{3}{5})^n=(\frac{2}{5})^{n+1}\times[C_n^0+C_{n+1}^1\times\frac{3}{5}+\cdots+C_{2n-1}^{n-1}\times(\frac{3}{5})^{n-1}+C_{2n}^n\times(\frac{3}{5})^n]$

因此$P_{n+1}-P_n=(\frac{2}{5})^{n+2}\times[C_{n+1}^0+C_{n+2}^1\times\frac{3}{5}+\cdots+C_{2n+1}^n\times(\frac{3}{5})^n+C_{2n+2}^{n+1}\times(\frac{3}{5})^{n+1}]$

$-(\frac{2}{5})^{n+1}\times[C_n^0+C_{n+1}^1\times\frac{3}{5}+\cdots+C_{2n-1}^{n-1}\times(\frac{3}{5})^{n-1}+C_{2n}^n\times(\frac{3}{5})^n]$

$=(\frac{2}{5})^{n+1}\times\{[C_{n+1}^0+C_{n+2}^1\times\frac{3}{5}+\cdots+C_{2n+1}^n\times(\frac{3}{5})^n+C_{2n+2}^{n+1}\times(\frac{3}{5})^{n+1}]$

$-[C_n^0+C_{n+2}^1\times\frac{3}{5}+\cdots+C_{2n+1}^n\times(\frac{3}{5})^n+C_{2n+1}^n\times(\frac{3}{5})^{n+1}+C_{2n+2}^{n+1}\times(\frac{3}{5})^{n+2}]\}$

则$P_{n+1}-P_n=(\frac{2}{5})^{n+1}\times[C_{2n+2}^{n+1}\times(\frac{3}{5})^{n+1}-C_{2n+1}^n\times(\frac{3}{5})^{n+1}-C_{2n+2}^{n+1}\times(\frac{3}{5})^{n+2}]$

$=(\frac{2}{5})^{n+1}\times(\frac{3}{5})^{n+1}(C_{2n+2}^{n+1}-C_{2n+1}^n-\frac{3}{5}C_{2n+2}^{n+1})$

$=(\frac{2}{5})^{n+1}\times(\frac{3}{5})^{n+1}(C_{2n+1}^{n+1}-\frac{3}{5}C_{2n+2}^{n+1})$

因为$C_{2n+1}^{n+1}-\frac{3}{5}C_{2n+2}^{n+1}=C_{2n+1}^{n+1}-\frac{3}{5}(C_{2n+1}^{n+1}+C_{2n+1}^{n})=\frac{2}{5}C_{2n+1}^{n+1}-\frac{3}{5}C_{2n+1}^{n}=-\frac{1}{5}C_{2n+1}^{n}$，

所以$P_{n+1}-P_n=(\frac{2}{5})^{n+1}\times(\frac{3}{5})^{n+1}\times(-\frac{1}{5}C_{2n+1}^{n})<0$，因此$P_{n+1}<P_n$．