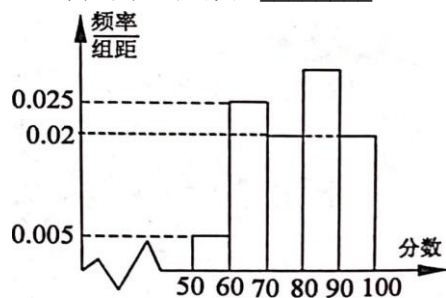


一、填空题

1. 已知集合 $A = \{1, 2\}$, $B = \{-1, a\}$, 若 $A \cup B = \{-1, a, 2\}$, 则 $a =$ _____.
2. 若复数 z 满足 $(1-i)z = 1+i$, 其中 i 是虚数单位, 则 z 的实部为_____.
3. 某校 100 名学生参加知识竞赛的成绩均在 $[50, 100]$ 内, 将学生成绩分成 $[50, 60)$, $[60, 70)$, $[70, 80)$, $[80, 90)$, $[90, 100]$ 五组, 得到如图所示的频率分布直方图, 则成绩在 $[80, 90)$ 内的学生人数是_____.



4. 一个算法的伪代码如图所示, 执行此算法, 最后输出的 y 的值为_____.

```

y ← -1
x ← -1
While y ≥ 1
    y ← 3 - x²
    x ← y
End While
Print y

```

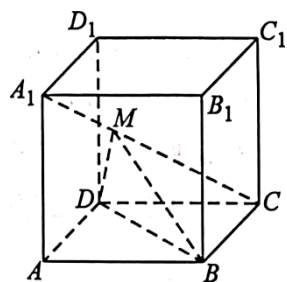
5. 某班推选一名学生管理班级防疫用品, 已知每个学生当选是等可能的, 若“选到女生”的概率是“选到男生”的概率的 $\frac{1}{2}$, 则这个班级的男生人数与女生人数的比值为_____.

6. 函数 $f(x) = \sqrt{2-x} + \ln x$ 的定义域为_____.

7. 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{4a} = 1$ 的顶点, 则 $a =$ _____.

8. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_4 = 5S_2$, $a_2 = 2$, 则 $a_4 =$ _____.

9. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 6, 点 M 是对角线 A_1C 上靠近点 A_1 的三等分点, 则三棱锥 $C-MBD$ 的体积为_____.

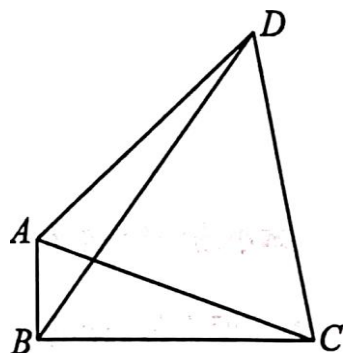


10. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 的周期为 2, 且 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = \begin{cases} 2^x + a, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{bx-1}{x+1}, & \frac{1}{2} < x \leq 1, \end{cases}$

则 $a+b=$ _____.

11. 已知锐角 α 满足 $\sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha = -1$, 则 $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) =$ _____.

12. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$, $AB=1$, $BC=3$, 以 AC 为一边在 $\triangle ABC$ 的另一侧作正三角形 ACD , 则 $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} =$ _____.



13. 在平面直角坐标系 xOy 中, AB 是圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 的直径, 且点 A 在第一象限; 圆 $O_1: (x-a)^2 + y^2 = r^2$ ($a > 0$) 与圆 O 外离, 线段 AO_1 与圆 O_1 交于点 M , 线段 BM 与圆 O 交于点 N , 且 $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{O_1N} = \vec{0}$, 则 a 的取值范围为_____.

14. 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, $a+b=t$ (t 为常数), 且直线 $y=ax+b$ 与曲线 $y=xe^x$ (e 是自然对数的底数, $e \approx 2.71828 \dots$) 相切. 若满足条件的有序实数对 (a, b) 唯一存在, 则实数 t 的取值范围为_____.

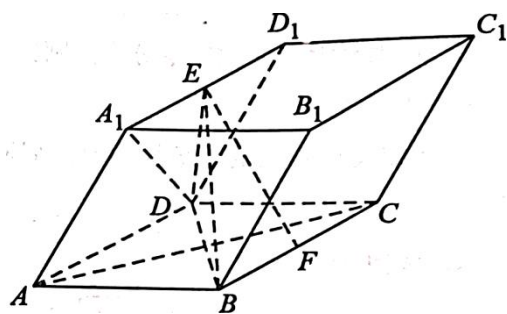
二、解答题: 解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 已知 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别为角 A, B, C 的对边, 且 $b \sin 2A = a \sin B$.

(1) 求 A ;

(2) 求 $\cos\left(B + \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(C + \frac{\pi}{3}\right)$ 的最大值.

16. 已知在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面 $ABCD$ 是菱形, 且平面 $A_1ADD_1 \perp$ 平面 $ABCD$, $DA_1 = DD_1$. 点 E, F 分别为线段 A_1D_1, BC 的中点.



(1) 求证: $EF \parallel$ 平面 CC_1D_1D ;

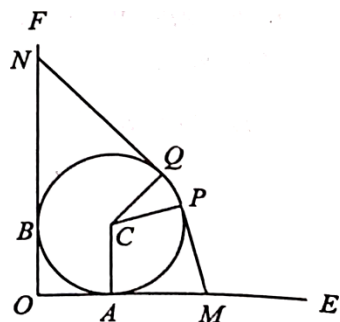
(2) 求证: $AC \perp$ 平面 EBD .

17. 在平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 右焦点到右准线的距离为 3.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 过点 $P(0, 1)$ 的直线 l 与椭圆 C 交于两点 A, B . 已知在椭圆 C 上存在点 Q , 使得四边形 $OAQB$ 是平行四边形, 求 Q 的坐标.

18. 某地开发一片荒地, 如图, 荒地的边界是以 C 为圆心, 半径为 1 千米的圆周. 已有两条互相垂直的道路 OE, OF , 分别与荒地的边界有且仅有一个接触点 A, B . 现规划修建一条新路 (由线段 MP, PQ , 线段 QN 三段组成), 其中点 M, N 分别在 OE, OF 上, 且使得 MP, QN 所在直线分别与荒地的边界有且仅有一个接触点 P, Q , PQ 所对的圆心角为 $\frac{\pi}{6}$. 记 $\angle PCA = 2\theta$. (道路宽度均忽略不计)



(1) 若 $\theta = \frac{5\pi}{12}$, 求 QN 的长度;

(2) 求新路总长度的最小值.

19.(本小题满分 16 分)

已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 s_n , $a_1 = 2$, 且对任意 $n \in N^*$, $a_n s_{n+1} - a_{n+1} s_n = 2a_{n+1} - 2a_n$ 恒成立.

(1) 求证: 数列 $\left\{\frac{s_n+2}{a_n}\right\}$ 是等差数列, 并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = a_n + 4n - 3$, 已知 b_2, b_i, b_j ($2 < i < j$) 成等差数列, 求正整数 i, j .

20.(本小题满分 16 分)

已知函数 $f(x) = (m-1)x + \ln x$, $g(x) = (m-2)x^2 + (n+3)x - 2$, $m, n \in R$.

(1) 当 $m=0$ 时, 求函数 $f(x)$ 的极值;

(2) 当 $n=0$ 时, 函数 $F(x) = g(x) - f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为单调函数, 求 m 的取值范围;

(3) 当 $n > 0$ 时, 判断是否存在正数 m , 使得函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的零点, 并说明理由.

数学试题

第 I 卷（必做题，共 160 分）

1. 已知集合 $A=\{1, 2\}$, $B=\{-1, a\}$, 若 $A \cup B=\{-1, a, 2\}$, 则 $a=$ _____.

答案: 1

考点: 集合并集运算

解析: $\because$ 集合 $A=\{1, 2\}$, $B=\{-1, a\}$, 且 $A \cup B=\{-1, a, 2\}$,
 $\therefore a=1$.

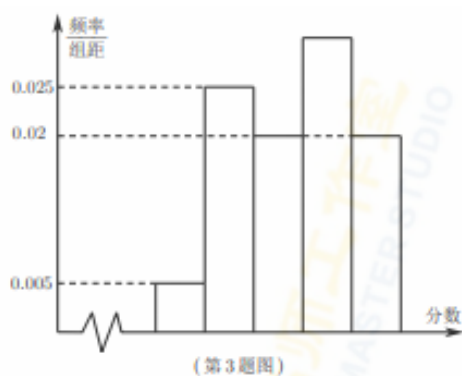
2. 若复数 z 满足 $(1-i)z=1+i$, 其中 i 是虚数单位, 则 z 的实部为_____.

答案: 0

考点: 复数

解析: $z = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i+i^2}{1-i^2} = i$, $\therefore z$ 的实部为 0.

3. 某校 100 名学生参加知识竞赛的成绩均在 $[50, 100]$ 内, 将学生成绩分成 $[50, 60)$, $[60, 70)$, $[70, 80)$, $[80, 90)$, $[90, 100]$ 五组, 得到如图所示的频率分布直方图, 则成绩在 $[80, 90)$ 内的学生人数是_____.



答案: 30

考点: 频率分布直方图

解析: $[1-(0.005+0.02 \times 2+0.025) \times 10] \times 100 = 30$.

4. 一个算法的伪代码如图所示, 执行此算法, 最后输出的 y 的值为_____.

```

y ← 1
x ← 1
While y ≥ 1
    y ← 3 - x2
    x ← y
End While
Print y

```

答案: -1

考点：伪代码

解析：第一步： $y=2$ ， $x=2$ ；

第一步： $y=-1$ ， $x=-1$ ；故最后输出的 y 的值为 -1 。

5. 某班推选一名学生管理班级防疫用品，已知每个学生当选是等可能的，若“选到女生”

的概率是“选到男生”的概率的 $\frac{1}{2}$ ，则这个班级的男生人数与女生人数的比值为_____。

答案：2

考点：随机变量的概率

解析： $\because$ “选到女生”的概率是“选到男生”的概率的 $\frac{1}{2}$ ，

$\therefore$ 男生人数与女生人数的比值为 2。

6. 函数 $f(x)=\sqrt{2-x}+\ln x$ 的定义域为_____。

答案：(0, 2]

考点：函数的定义域

解析： $\begin{cases} 2-x \geq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < x \leq 2$ ，故与函数的定义域为(0, 2]。

7. 在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y^2=4x$ 的焦点是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{4a}=1$ 的顶点，则 $a=$ _____。

答案：1

考点：抛物线与双曲线的简单性质

解析： $\because$ 抛物线 $y^2=4x$ 的焦点是(1, 0)，

$\therefore$ 双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{4a}=1$ 的顶点为(1, 0)，故 $a=1$ 。

8. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ， $S_4=5S_2$ ， $a_2=2$ ，则 $a_4=$ _____。

答案：2 或 8

考点：等比数列的简单性质

解析： $\because \{a_n\}$ 为等比数列， $S_4=5S_2$ ， $\therefore a_1+a_2+a_3+a_4=5(a_1+a_2)$ ，

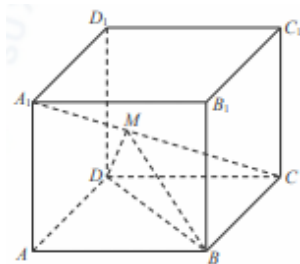
$\therefore a_3+a_4=4(a_1+a_2)$ ，

当 $a_1+a_2=0$ 时， $q=-1$ ，此时 $a_4=2$ ；

当 $a_1+a_2 \neq 0$ 时， $q^2=4$ ，此时 $a_4=a_2q^2=2 \times 4=8$ ，

综上所述， $a_4=2$ 或 8。

9. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 6, 点 M 是对角线 A_1C 上靠近点 A_1 的三等分点, 则三棱锥 $C-MBD$ 的体积为_____.



答案: 24

考点: 棱锥的体积

解析: $V_{C-MBD} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} BC^2 \times \frac{2}{3} AA_1 = \frac{1}{9} \times 6^3 = 24$.

10. 已知定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 的周期为 2, 且 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = \begin{cases} 2^x + a, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{bx-1}{x+1}, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$,

则 $a+b=$ _____.

答案: 0

考点: 函数的奇偶性与周期性

解析: $\because f(x)$ 为定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数, $\therefore f(-1) = -f(1)$ ①, $f(0) = 0$,

$\because$ 函数 $f(x)$ 的周期为 2, $\therefore f(-1) = f(1)$ ②, 由①, ②得 $f(-1) = f(1) = 0$

$$\therefore \begin{cases} f(0) = 2^0 + a = 0 \\ f(1) = \frac{b-1}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow a+b=0.$$

11. 已知锐角 α 满足 $\sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha = -1$, 则 $\tan(\alpha + \frac{\pi}{4}) =$ _____.

答案: 2

考点: 三角恒等变换

解析: $\because \sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha = -1$,

$$\therefore 2\sin \alpha \cos \alpha - 2(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 0,$$

化简得 $3\sin^2 \alpha + 2\sin \alpha \cos \alpha - \cos^2 \alpha = 0$, 两边同时除以 $\cos^2 \alpha$ 得,

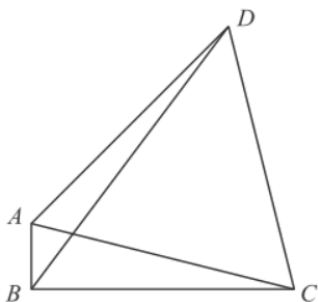
$$3\tan^2 \alpha + 2\tan \alpha - 1 = 0, \because \alpha \text{ 为锐角}, \therefore \tan \alpha > 0$$

$$\text{解得 } \tan \alpha = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \alpha + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \alpha \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{1}{3} + 1}{1 - \frac{1}{3} \times 1} = 2.$$

12. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$, $AB=1$, $BC=3$, 以 AC 为一边在 $\triangle ABC$ 的另一侧

作正三角形 ACD , 则 $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} =$ _____.



答案: 4

考点: 平面向量的数量积

解析: 取 AC 中点 E , 则

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} &= (\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{ED}) \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BE} \cdot \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= \frac{1}{2} (\overrightarrow{BC}^2 - \overrightarrow{BA}^2) = \frac{1}{2} \times (3^2 - 1^2) = 4. \end{aligned}$$

13. 在平面直角坐标系 xOy 中, AB 是圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 的直径, 且点 A 在第一象限; 圆 $O_1: (x-a)^2 + y^2 = r^2 (a > 0)$ 与圆 O 外离, 线段 AO_1 与圆 O_1 交于点 M , 线段 BM 与圆 O 交于点 N , 且 $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{O_1N} = \vec{0}$, 则 a 的取值范围为_____.

答案: $(2\sqrt{2}, 4)$

考点: 圆与圆的位置关系

解析: $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{O_1N} = \vec{0} \Rightarrow$ 四边形 ON_1OM 为平行四边形, 即 $ON = MO_1 = r = 1$,

且 ON 为 $\triangle ABM$ 的中位线 $\Rightarrow AM = 2ON = 2 \Rightarrow AO_1 = 3$,

故点 A 在以 O_1 为圆心, 3 为半径的圆上, 该圆的方程为: $(x-a)^2 + y^2 = 9$,

故 $(x-a)^2 + y^2 = 9$ 与 $x^2 + y^2 = 1$ 在第一象限有交点, 即 $2 < a < 4$,

求得 $x_A = \frac{a^2 - 8}{2a} > 0 \Rightarrow a > 2\sqrt{2}$, 故 a 的取值范围为 $(2\sqrt{2}, 4)$.

14. 已知 $a, b \in \mathbb{R}$, $a+b=t$ (t 为常数), 且直线 $y=ax+b$ 与曲线 $y=xe^x$ (e 是自然对数的

底数， $e \approx 2.71828 \dots$) 相切. 若满足条件的有序实数对 (a, b) 唯一存在，则实数 t 的取值范围为_____.

答案: $(-\infty, -\frac{5}{e^2}) \cup \{e\}$

考点: 利用导数研究函数的切线, 函数与方程

解析: 设切点为 $(x_0, x_0 e^{x_0})$

$$y' = (x+1)^x e,$$

$$\therefore \begin{cases} a = (x_0 + 1)e^{x_0} \\ x_0 e^{x_0} = ax_0 + b \end{cases} \Rightarrow b = -x_0^2 e^{x_0},$$

$$a + b = e^{x_0}(-x_0^2 + x_0 + 1) = f(x_0) = t \text{ 有唯一解,}$$

$$f'(x_0) = -e^{x_0}(x_0 + 2)(x_0 - 1),$$

x_0	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x_0)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x_0)$	递减	$-\frac{5}{e^2}$	递增	e	递减

故 $f(x_0) = t$ 有唯一解时 t 的取值范围为 $(-\infty, -\frac{5}{e^2}) \cup \{e\}$.

二、解答题 (本大题共 6 小题, 共计 90 分, 请在答题纸指定区域内作答, 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

15. (本小题满分 14 分)

已知 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别为角 A, B, C 的对边, 且 $b \sin 2A = a \sin B$.

(1) 求 A ;

(2) 求 $\cos(B + \frac{\pi}{6}) + \sin(C + \frac{\pi}{3})$ 的最大值.

解: (1) $\because b \sin 2A = a \sin B, \therefore 2b \sin A \cos A = a \sin B,$

$$\therefore \text{由正弦定理 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}, \text{ 得 } 2ba \cos A = ab,$$

$$\because ab \neq 0, \therefore \cos A = \frac{1}{2},$$

$$\text{又 } \because \text{三角形内角 } A \in (0, \pi), \therefore A = \frac{\pi}{3};$$

(2) 由 (1) $A = \frac{\pi}{3}$, 又 $A+B+C = \pi$, 得 $C = \pi - A - B = \frac{2\pi}{3} - B$, $B \in (0, \frac{2\pi}{3})$,

$$\cos(B + \frac{\pi}{6}) + \sin(C + \frac{\pi}{3}) = \cos B \cos \frac{\pi}{6} - \sin B \sin \frac{\pi}{6} + \sin(\pi - B)$$

$$\frac{1}{2} \sin B + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos B = \sin(B + \frac{\pi}{3})$$

$\because B \in (0, \frac{2\pi}{3})$, $\therefore B + \frac{\pi}{3} \in (\frac{\pi}{3}, \pi)$, $\therefore$ 当 $B + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$,

即 $B = \frac{\pi}{6}$ 时, $\sin(B + \frac{\pi}{3})$ 取最大值 1,

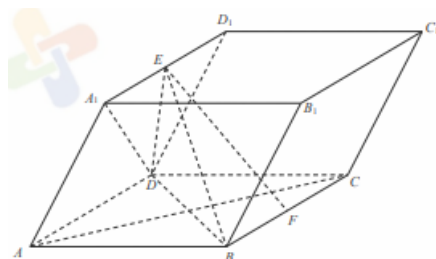
$\therefore \cos(B + \frac{\pi}{6}) + \sin(C + \frac{\pi}{3})$ 的最大值为 1.

16. (本小题满分 14 分)

已知在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面 $ABCD$ 是菱形, 且平面 $A_1ADD_1 \perp$ 平面 $ABCD$, $DA_1 = DD_1$, 点 E, F 分别为线段 A_1D_1, BC 的中点.

(1) 求证: $EF \parallel$ 平面 CC_1D_1D ;

(2) 求证: $AC \perp EBD$.



证明: (1) 连结 CD , 四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $A_1B_1C_1D_1, BB_1C_1C$ 是平行四边形,

$\therefore A_1D_1 \parallel B_1C_1, BC \parallel B_1C_1$, 且 $A_1D_1 = B_1C_1, BC = B_1C_1$,

又 $\because$ 点 E, F 分别为线段 AD, BC 的中点,

$\therefore ED_1 \parallel FC, ED_1 = FC$,

所以四边形 ED_1CF 是平行四边形,

$\therefore EF \parallel CD_1$, 又 $\because EF \not\subset$ 平面 $CC_1D_1D, CD \subset$ 平面 CC_1D_1D ,

$\therefore EF \parallel$ 平面 CC_1D_1D

(2) 四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 四边形 AA_1D_1D 是平行四边形,

$\therefore AD \parallel A_1D_1$, 在 $\triangle DA_1D_1$ 中, $DA_1 = DD_1$, 点 E 为线段 A_1D_1 的中点,

$\therefore DE \perp A_1D_1$, 又 $\because AD \parallel A_1D_1, \therefore DE \perp AD$,

又 $\because$ 平面 $A_1ADD_1 \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $A_1ADD_1 \cap$ 平面 $ABCD = AD, DE \subset$ 平面 A_1ADD_1 ,

$\therefore DE \perp$ 平面 $ABCD$, 又 $AC \subset$ 平面 $ABCD, \therefore DE \perp AC$,

$\because$ 底面 $ABCD$ 是菱形, $\therefore BD \perp AC$,

又 $\because BD \cap DE = D$, $BD, DE \subset$ 平面 EBD ,

$\therefore AC \perp$ 平面 EBD .

17. (本小题满分 14 分)

在平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 右焦点到右

准线的距离为 3.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 过点 $P(0, 1)$ 的直线 l 与椭圆 C 交于两点 A, B . 已知在椭圆 C 上存在点 Q , 使得四边形 $OAQB$ 是平行四边形, 求 Q 的坐标.

解: (1) 设焦距为 $2c$,

$$\because \text{椭圆 } C \text{ 的离心率为 } \frac{1}{2}, \therefore \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \text{ ①},$$

$$\because \text{右焦点到右准线的距离为 } 3, \therefore \frac{a^2}{c} - c = 3 \text{ ②},$$

$$\text{由 ①, ② 解得 } a = 2, c = 1, \text{ 故 } b^2 = a^2 - c^2 = 3,$$

$$\therefore \text{椭圆 } C \text{ 的标准方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1,$$

(2) 当直线 l 斜率不存在时, 四边形 $OAQB$ 不可能平行四边形, 故直线 l 斜率存在

$$\because \text{直线 } l \text{ 过点 } P(0, 1), \text{ 设直线 } l \text{ 为: } y = kx + 1,$$

$$\text{设 } A(x_1, kx_1 + 1), B(x_2, kx_2 + 1),$$

$$\text{由四边形 } OAQB \text{ 是平行四边形, 得 } Q(x_1 + x_2, k(x_1 + x_2) + 2)$$

$$\begin{cases} y = kx + 1 \\ 3x^2 + 4y^2 - 12 = 0 \end{cases}, \text{ 化简得: } (3 + 4k^2)x^2 + 8kx - 8 = 0,$$

$$x = \frac{-8k \pm \sqrt{\Delta}}{2(3 + 4k^2)} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{8k}{3 + 4k^2} \\ x_1 x_2 = -\frac{8}{3 + 4k^2} \end{cases},$$

$$k(x_1 + x_2) + 2 = k \cdot \left(-\frac{8k}{3 + 4k^2}\right) + 2 = \frac{6}{3 + 4k^2},$$

$$\therefore Q\left(-\frac{8k}{3 + 4k^2}, \frac{6}{3 + 4k^2}\right), \because \text{点 } Q \text{ 在椭圆 } C \text{ 上},$$

$$\therefore 3\left(-\frac{8k}{3 + 4k^2}\right)^2 + 4\left(\frac{6}{3 + 4k^2}\right)^2 = 12, \text{ 解得 } k = \pm \frac{1}{2}, \text{ 代入 } Q \text{ 的坐标, 得}$$

$$Q(1, \frac{3}{2}) \text{ 或 } (-1, \frac{3}{2}).$$

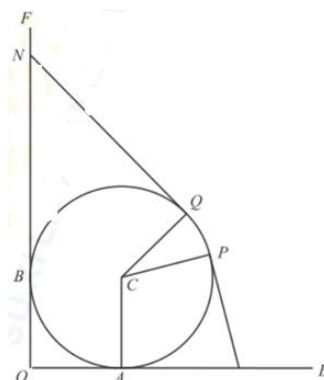
18. (本小题满分 16 分)

某地开发一片荒地，如图，荒地的边界是以 C 为圆心，半径为 1 千米的圆周．已有两条互相垂直的道路 OE ， OF ，分别与荒地的边界有且仅有一个接触点 A ， B ．现规划修建一条新路（由线段 MP ， PQ ，线段 QN 三段组成），其中点 M ， N 分别在 OE ， OF 上，且使得 MP ， QN 所在直线分别与荒地的边界有且仅有一个接触点 P ， Q ， PQ 所对的圆心角为

$\frac{\pi}{6}$ ．记 $\angle PCA = 2\theta$ （道路宽度均忽略不计）．

(1) 若 $\theta = \frac{5\pi}{12}$ ，求 QN 的长度；

(2) 求新路总长度的最小值．



解：(1) 连接 CB ， CN ， CM ， $OM \perp ON$ ， OM ， ON ， PM ， QN 均与圆 C 相切

$\therefore CB \perp ON$ ， $CA \perp OM$ ， $CP \perp MP$ ， $CQ \perp NQ$ ， $\therefore CB \perp CA$

$$\because \angle PCA = 2\theta = \frac{5\pi}{6}, \quad \angle PCQ = \frac{\pi}{6}, \quad \therefore \angle QCB = 2\pi - \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2},$$

此时四边形 $BCQN$ 是正方形， $\therefore QN = CQ = 1$ ，

答： QN 的长度为 1 千米；

$$(2) \because \angle PCA = 2\theta, \quad \text{可得 } \angle MCP = \theta, \quad \angle NCQ = \frac{2\pi}{3} - \theta,$$

$$\text{则 } MP = \tan \theta, \quad PQ = \frac{\pi}{6}, \quad NQ = \tan\left(\frac{2\pi}{3} - \theta\right) = \frac{\tan \frac{2\pi}{3} - \tan \theta}{1 + \tan \frac{2\pi}{3} \tan \theta} = \frac{\tan \theta + \sqrt{3}}{\sqrt{3} \tan \theta - 1}$$

设新路长为 $f(\theta)$ ，其中 $\theta \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$ ，即 $\tan \theta \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\begin{aligned}\therefore f(\theta) &= \tan \theta + \frac{\pi}{6} + \frac{\tan \theta + \sqrt{3}}{\sqrt{3} \tan \theta - 1} = \tan \theta - \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{4}{3 \tan \theta - \sqrt{3}} + \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{\pi}{6}, \\ &\geq 2\sqrt{3} + \frac{\pi}{6}, \text{ 当 } \tan \theta = \sqrt{3} \text{ 时取 “=”},\end{aligned}$$

答：新路总长度的最小值为 $2\sqrt{3} + \frac{\pi}{6}$ 。

19. (本小题满分 16 分)

已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = 2$, 且对任意 $n \in \mathbf{N}^*$,

$$a_n S_{n+1} - a_{n+1} S_n = 2a_{n+1} - 2a_n \text{ 恒成立}.$$

(1) 求证：数列 $\left\{ \frac{S_n + 2}{a_n} \right\}$ 是等差数列，并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 $b_n = a_n + 4n - 3$, 已知 $b_2, b_i, b_j (2 < i < j)$ 成等差数列，求正整数 i, j 。

解：(1) $\because a_n S_{n+1} - a_{n+1} S_n = 2a_{n+1} - 2a_n$,

$$\therefore a_n (S_{n+1} + 2) = a_{n+1} (S_n + 2),$$

$\because$ 数列 $\{a_n\}$ 各项均为正数, $\therefore a_n a_{n+1} > 0$, 等式两边同时除以 $a_n a_{n+1}$,

得 $\frac{S_{n+1} + 2}{a_{n+1}} - \frac{S_n + 2}{a_n} = 0$, 故数列 $\left\{ \frac{S_n + 2}{a_n} \right\}$ 是等差数列, 首项为 2, 公差为 0,

$$\therefore \frac{S_n + 2}{a_n} = 2, \text{ 即 } S_n + 2 = 2a_n \text{ ①}, S_2 + 2 = 2a_2, \text{ 求得 } a_2 = 4,$$

$$\therefore S_{n-1} + 2 = 2a_{n-1} (n \geq 2) \text{ ②}, \text{ ①} - \text{②} \text{ 得 } a_n = 2a_n - 2a_{n-1}, \text{ 即 } a_n = 2a_{n-1},$$

又 $a_2 = 4 = 2a_1$, $\therefore$ 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 数列 $\{a_n\}$ 是以 2 为首项, 2 为公比的等比数列

故数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2^n$;

$$(2) b_n = a_n + 4n - 3 = 2^n + 4n - 3,$$

$$\therefore b_2 = 9, b_i = 2^i + 4i - 3, b_j = 2^j + 4j - 3,$$

$\because b_2, b_i, b_j (2 < i < j)$ 成等差数列,

$$\therefore 2(2^i + 4i - 3) = 9 + 2^j + 4j - 3,$$

$$\text{变形得 } \frac{2i-3}{2^{i-1}} = 2^{j-i-1} + \frac{j}{2^{i-1}} - 1 (*),$$

$$\text{①当 } j \geq i+2 \text{ 时, } 2^{j-i-1} + \frac{j}{2^{i-1}} - 1 > 1,$$

$$\text{令 } c_i = \frac{2i-3}{2^{i-1}} (i \geq 3), \text{ 则 } c_{i+1} - c_i = \frac{2i-1}{2^i} - \frac{2i-3}{2^{i-1}} = \frac{5-2i}{2^i} < 0 (i \geq 3),$$

$$\therefore \text{数列 } \{c_i\} \text{ 单调递减, 故 } c_{i(\max)} = c_3 = \frac{3}{4} < 1,$$

$$\therefore \frac{2i-3}{2^{i-1}} < 1, \quad 2^{j-i-1} + \frac{j}{2^{i-1}} - 1 > 1, \text{ 故 } j \geq i+2 \text{ 时 } * \text{ 式不成立,}$$

$$\text{②当 } j = i+1 \text{ 时, } * \text{ 式转化为 } \frac{2i-3}{2^{i-1}} = 2^0 + \frac{i+1}{2^{i-1}} - 1, \text{ 解得 } i=4, \text{ 故 } j=5.$$

20. (本小题满分 16 分)

已知函数 $f(x) = (m-1)x + \ln x$, $g(x) = (m-2)x^2 + (n+3)x - 2$, $m, n \in \mathbb{R}$.

(1) 当 $m=0$ 时, 求函数 $f(x)$ 的极值;

(2) 当 $n=0$ 时, 函数 $F(x) = g(x) - f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为单调函数, 求 m 的取值范围;

(3) 当 $n>0$ 时, 判断是否存在正数 m , 使得函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的零点, 并说明理由.

解: (1) 当 $m=0$ 时, $f(x) = -x + \ln x$,

$$\therefore f'(x) = -1 + \frac{1}{x}, \text{ 令 } f'(x) = 0, \text{ 解得 } x=1, \text{ 列表如下:}$$

x	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	单调递增		单调递减

$\therefore$ 当 $x=1$ 时, 函数 $f(x)$ 有极大值 -1, 无极小值;

(2) 当 $n=0$ 时, 函数 $F(x) = g(x) - f(x) = (m-2)x^2 - (m-4)x - \ln x - 2$

$$\therefore F'(x) = \frac{2(m-2)x^2 - (m-4)x - 1}{x} = \frac{(2x-1)[(m-2)x+1]}{x},$$

要使函数 $F(x) = g(x) - f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为单调函数,

则对 $\forall x \in (0, +\infty)$, $F'(x) \geq 0$ 或 $F'(x) \leq 0$ 恒成立,

令 $g(x) = (2x-1)[(m-2)x+1]$, $g(x) \geq 0$ 或 $g(x) \leq 0$ 恒成立

①当 $0 < m < 2$ 时, $x \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2-m}, +\infty)$ 时, $g(x) < 0$, $x \in (\frac{1}{2}, \frac{1}{2-m})$

时, $g(x) > 0$, 不符题意;

②当 $m < 0$ 时, $x \in (0, \frac{1}{2-m}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$ 时, $g(x) < 0$, $x \in (\frac{1}{2-m}, \frac{1}{2})$ 时,

$g(x) > 0$, 不符题意;

③当 $m \geq 2$ 时, $x \in (0, \frac{1}{2})$ 时, $g(x) < 0$, $x \in (\frac{1}{2}, +\infty)$ 时, $g(x) > 0$, 不符题

意;

④当 $m = 0$ 时, $g(x) = -(2x-1)^2 \leq 0$, 此时 $F'(x) \leq 0$ 恒成立,

函数 $F(x) = g(x) - f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 符合题意,

综上所述, m 的取值范围为 $\{0\}$;

(3) $\because$ 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的零点, 不妨设 x_0 为相同的零点

$$\text{则} \begin{cases} (m-1)x_0 + \ln x_0 = 0 \\ (m-2)x_0^2 + (n+3)x_0 - 2 = 0 \end{cases},$$

$$\text{得 } m = \frac{x_0 - \ln x_0}{x_0} \text{ ①, } -x_0^2 - x_0 \ln x_0 + (n+3)x_0 - 2 = 0 \text{ ②,}$$

有 (1) 知 $f(x) = -x + \ln x \leq f(1) = -1 < 0$, 故 $x_0 - \ln x_0 > 0$,

$$\therefore m = \frac{x_0 - \ln x_0}{x_0} > 0,$$

$$\text{令 } h(x_0) = -x_0^2 - x_0 \ln x_0 + (n+3)x_0 - 2,$$

$$\text{又 } h(1) = n > 0, \quad h(n+3) = -(n+3)\ln(n+3) - 2 < 0,$$

故当 $x_0 \in (1, n+3)$ 时, $h(x_0) = 0$, ②式有解, 且能满足 $m = \frac{x_0 - \ln x_0}{x_0} > 0$,

$\therefore$ 存在正数 m , 使得函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的零点.

答案: