2021~2022学年度武汉市部分学校高三起点质量检测

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 若复数z的共轭复数$\overline{z}$满足$(1+\mathrm{i})\overline{z}=\mathrm{i}$，则$z=$（　　）

A. $\dfrac{-1+\mathrm{i}}{2}$　　B. $\dfrac{-1-\mathrm{i}}{2}$　　C. $\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}$　　D. $\dfrac{1-\mathrm{i}}{2}$

2. 若$\tan\alpha=2$，则$\dfrac{\cos 2\alpha}{1-\sin 2\alpha}=$（　　）

A. $-\dfrac{1}{3}$　　B. $\dfrac{1}{3}$　　C. -3　　D. 3

3. 在平面直角坐标系中，某菱形的一组对边所在的直线方程分别为$x+2y+1=0$和$x+2y+3=0$，另一组对边所在的直线方程分别为$3x-4y+c_1=0$和$3x-4y+c_2=0$，则$|c_1-c_2|=$（　　）

A. $2\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{5}$　　C. 2　　D. 4

4. 某圆柱体的底面直径和高均与某球体的直径相等，则该圆柱体表面积与球体表面积的比值为（　　）

A. 2　　B. $\dfrac{4}{3}$　　C. $\dfrac{3}{2}$　　D. $\dfrac{5}{4}$

5. 在一次试验中，随机事件A，B满足$P(A)=P(B)=\dfrac{2}{3}$，则（　　）

A. 事件A，B一定互斥　　B. 事件A，B一定不互斥

C. 事件A，B一定互相独立　　D. 事件A，B一定不互相独立

6. 要得到函数$y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$的图象，可以将函数$y=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$的图象（　　）

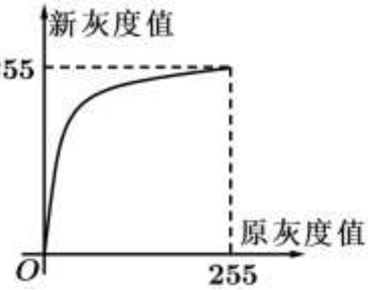
A. 向右平移$\dfrac{\pi}{12}$个单位长度　　B. 向左平移$\dfrac{\pi}{12}$个单位长度

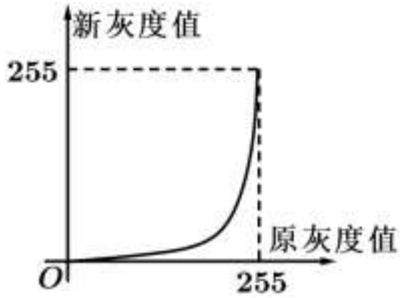
C. 向右平移$\dfrac{\pi}{6}$个单位长度　　D. 向左平移$\dfrac{\pi}{6}$个单位长度

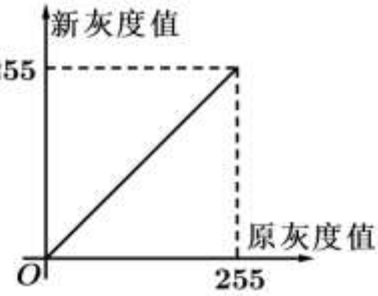
7. 在用计算机处理灰度图像（即俗称的黑白照片）时，将灰度分为256个等级，最暗的黑色用0表示，最亮的白色用255表示，中间的灰度根据其明暗渐变程度用0至255之间对应的数表示，这样可以给图像上的每个像素赋予一个“灰度值”.在处理有些较黑的图像时，为了增强较黑部分的对比度，可对图像上每个像素的灰度值进行转换，扩展低灰度级，压缩高灰度级，实现如下图所示的效果：

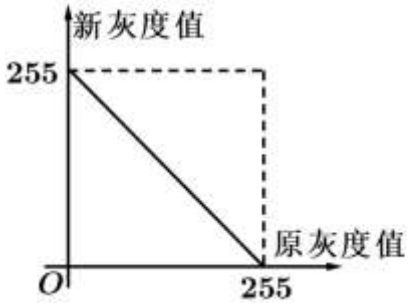
处理前　　　　处理后

则下列可以实现该功能的一种函数图象是（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

8. 设双曲线 $E_1x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 左右焦点为 F_1，F_2，左顶点为 A，点 M 是双曲线 E 在第一象限中内的一点，直线 MF_1 交双曲线 E 的左支于点 N，若 $NA//MF_2$，则 $|MF_2|=$（　　）

A. $\frac{7}{4}$　　B. $\frac{5}{2}$　　C. $\frac{8}{3}$　　D. $\frac{11}{4}$

二、多选题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 下列关于空集的说法中，正确的有（　　）

A. $\varnothing\in\varnothing$　　B. $\varnothing\subseteq\varnothing$　　C. $\varnothing\in\{\varnothing\}$　　D. $\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$

10. 某公司经营四种产业，为应对市场变化，在三年前进行产业结构调整，优化后的产业结

构使公司总利润不断增长，今年总利润比三年前增加一倍，调整前后的各产业利润与总利润的占比如下图所示：

则下列结论中正确的有（　　）

A. 调整后房地产业的利润有所下降

B. 调整后医疗器械的利润增长量最大

C. 调整后生物制药的利润增长率最高

D. 调整后金融产业的利润占比最低

11. 数列$\{a_n\}$依次为：1，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{5}$，$\frac{1}{5}$，$\frac{1}{5}$，$\frac{1}{5}$，$\frac{1}{5}$，$\frac{1}{7}$，$\frac{1}{7}$，$\frac{1}{7}$，$\frac{1}{7}$，$\frac{1}{7}$，$\frac{1}{7}$，$\frac{1}{7}$，$\frac{1}{9}$，$\frac{1}{9}$，…，其中第一项为$\frac{1}{1}$，接下来三项均为$\frac{1}{3}$，再接下来五项均为$\frac{1}{5}$，依此类推.记$\{a_n\}$　前n项和为S_n，则（　　）

A. $a_{100}=\frac{1}{19}$

B. 存在正整数k，使得$a_k>\frac{1}{2\sqrt{k}-1}$

C. $S_n\le\sqrt{n}$

D. 数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$　递减数列

12. 已知函数$f\left(x\right)=\frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^{2x}+k}$.则（　　）

A. 当$k=0$时，$f\left(x\right)$是$\mathbf{R}$上的减函数

B. 当$k=1$时，$f\left(x\right)$的最大值为$\frac{1+\sqrt{2}}{2}$

C. $f\left(x\right)$可能有两个极值点

D. 若存在实数a，b，使得$g\left(x\right)=f\left(x+a\right)+b$为奇函数，则$k=-1$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 抛物线$y^2=2x$上两点A，B与坐标原点O构成等边三角形，则该三角形的边长为__________.

14. $\left(x+2y\right)\left(x-y\right)^5$的展开式中$x^2y^4$的系数为________.

15 平行四边形$ABCD$中，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=5$，点$P$满足$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}=8$.则$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=$__________.

16. 空间四面体$ABCD$中，$AB=CD=2$，$AD=BC=2\sqrt{3}$. $AC=4$，直线BD与AC所成的角为45°，则该四面体的体积为__________.

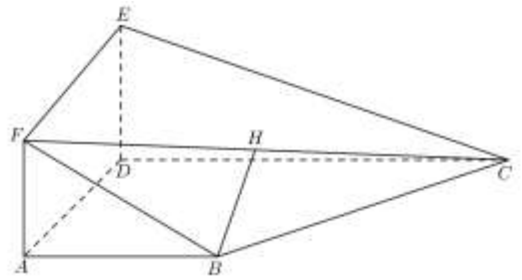
四、解答题：本题共6小题，共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 设数列$\left\{a_n\right\}$的前n项和为S_n，满足$S_n=1-na_n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$.

（1）求数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式；

（2）设数列$\left\{\dfrac{\left(-1\right)^n}{a_n}\right\}$的前$n$项和为$T_n$，求$T_{2n}$的表达式.

18. 在如图所示的六面体$ABCDEF$中，矩形$ADEF\perp$平面$ABCD$，$AB=AD=AF=1$，$CD=2$，$CD\perp AD$，$AB//CD$.



（1）设H为CF中点，证明：$BH//$平面$ADEF$；

（2）求二面角$B-CF-E$大小的正弦值.

19. 在平面凸四边形$ABCD$中，$\angle BAD=30°$，$\angle ABC=135°$，$AD=6$，$BD=5$，$BC=3\sqrt{2}$.

（1）求$\cos\angle DBA$.　　（2）求CD长.

20. 在某班学生举办的庆祝建党一百周年活动中，指定 4 名同学依次在分别写有“建”，“党”，“百”，“年”四字的四张卡牌中有放回地随机抽取一张并记录结果.

（1）求最后的结果中同时有“建”“党”两字的概率；

（2）用 X 表示结果中这四个字各出现次数中的最大值，求 EX .

21 已知函数 $f\left(x\right)=2\left(x-2\right)\ln x+ax^2-1$.

（1）当 $a=0$ 时，求曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(1,f\left(1\right)\right)$ 处的切线方程；

（2）若 $f\left(x\right)\ge 0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

22. 已知椭圆 E ：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ，点 $A\left(0,-1\right)$ 是椭圆 E 短轴的一个四等分点.

（1）求椭圆 E 的标准方程；

（2）设过点 A 且斜率为 k_1 的动直线与椭圆 E 交于 M ，N 两点，且点 $B\left(0,2\right)$ ，直线 BM ，BN 分别交 $\odot C$ ：$x^2+\left(y-1\right)^2=1$ 于异于点 B 的点 P ，Q ，设直线 PQ 的斜率为 k_2 ，求实数 λ ，使得 $k_2=\lambda k_1$ ，恒成立.

2021~2022 学年度武汉市部分学校高三起点质量检测（参考答案）

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 若复数 z 的共轭复数 $\overline{z}$ 满足 $(1+\mathrm{i})\overline{z}=\mathrm{i}$，则 $z=$（　　）

A. $\dfrac{-1+\mathrm{i}}{2}$　　B. $\dfrac{-1-\mathrm{i}}{2}$　　C. $\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}$　　D. $\dfrac{1-\mathrm{i}}{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】结合复数的除法运算求出 $\overline{z}$，根据共轭复数的概念即可求出结果.

【详解】因　$(1+\mathrm{i})\overline{z}=\mathrm{i}$，则 $\overline{z}=\dfrac{\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{\mathrm{i}(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$，则 $z=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$，

故选：D.

2. 若 $\tan\alpha=2$，则 $\dfrac{\cos 2\alpha}{1-\sin 2\alpha}=$（　　）

A. $-\dfrac{1}{3}$　　B. $\dfrac{1}{3}$　　C. -3　　D. 3

【答案】C

【解析】

【分析】结合二倍角公式以及同角的平方关系化简得到 $\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-2\cos\alpha\sin\alpha}$，进而结合同角的商数关系得到关于 $\tan\alpha$ 的式子即可求出结果.

【　详　解　】　因　为

c α / 1− α = o 2 − s α / 2 s αi+ 2　2 2 / n α − = α − / 2 c / α 2 3，

故选：C.

3. 在平面直角坐标系中，某菱形的一组对边所在的直线方程分别为 $x+2y+1=0$ 和 $x+2y+3=0$，另一组对边所在的直线方程分别为 $3x-4y+c_1=0$ 和 $3x-4y+c_2=0$，则 $|c_1-c_2|=$（　　）

A. $2\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{5}$　　C. 2　　D. 4

【答案】B

【解析】

【分析】分别求出菱形的四个顶点，然后根据菱形的对角线互相垂直得到方程即可求出求出结果.

【详解】设直线 $x+2y+1=0$ 与直线 $3x-4y+c_2=0$ 的交点为A，则 $\begin{cases}x+2y+1=0\\3x-4y+c_2=0\end{cases}$，

解得 $\begin{cases}x=-\dfrac{c_2+2}{5}\\y=\dfrac{c_2-3}{10}\end{cases}$，故 $A\left(-\dfrac{c_2+2}{5},\dfrac{c_2-3}{10}\right)$，

同理设直线 $x+2y+1=0$ 与直线 $3x-4y+c_1=0$ 的交点为 B，则 $B\left(-\dfrac{c_1+2}{5},\dfrac{c_1-3}{10}\right)$，

设直线 $x+2y+3=0$ 与直线 $3x-4y+c_1=0$ 的交点为 C，则 $C\left(-\dfrac{c_1+6}{5},\dfrac{c_1-9}{10}\right)$，

设直线 $x+2y+3=0$ 与直线 $3x-4y+c_2=0$ 的交点为 D，则 $D\left(-\dfrac{c_2+6}{5},\dfrac{c_2-9}{10}\right)$，

由菱形的性质可知 $BD\perp AC$，且 BD,AC 的斜率均存在，所以 $k_{BD}\cdot k_{AC}=-1$，

则 $\dfrac{\frac{c_2-3}{10}-\frac{c_2-9}{10}}{-\frac{c_2+2}{5}+-\frac{c_1+6}{5}}\cdot\dfrac{\frac{c_2-3}{10}-\frac{c_2-9}{10}}{-\frac{c_1+2}{5}+-\frac{c_2+6}{5}}=-1$，即 $\dfrac{36-(c_2-c_1)^2}{4\left[16-(c_2-c_1)^2\right]}=-1$，解得

$|c_1-c_2|=2\sqrt{5}$

故选：B.

4. 某圆柱体的底面直径和高均与某球体的直径相等，则该圆柱体表面积与球体表面积的比值为（　　）

A. 2　　　　B. $\dfrac{4}{3}$　　　　C. $\dfrac{3}{2}$　　　　D. $\dfrac{5}{4}$

【答案】C

【解析】

【分析】设圆柱得底面半径为 R，则高为 $2R$，球的半径为 R，分别求出圆柱和球得表面积，即可得出答案.

【详解】解：设圆柱得底面半径为 R，则高为 $2R$，球的半径为 R，

所以圆柱体表面积 $S_1=2\pi R^2+2\pi R\cdot 2R=6\pi R^2$，

球得表面积 $S_2=4\pi R^2$，所以圆柱体表面积与球体表面积的比值为 $\dfrac{6\pi R^2}{4\pi R^2}=\dfrac{3}{2}$． 故选：C.

5. 在一次试验中，随机事件A，B 满足 $P(A)=P(B)=\dfrac{2}{3}$，则（　　）

A. 事件A，B一定互斥

B. 事件A，B一定不互斥

C. 事件A，B一定互相独立

D. 事件A，B一定不互相独立

【答案】B

【解析】

【分析】根据互斥事件的概念即可判断.

【详解】因为$P(A)+P(B)>1$，所以事件A，B一定不互斥，

故选：B.

6. 要得到函数$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$的图象，可以将函数$y=\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$的图象（　　）

A. 向右平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度

B. 向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度

C. 向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度

D. 向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度

【答案】A

【解析】

【分析】利用诱导公式将平移前的函数化简得到$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，进而结合平移变换即可求出结果.

【详解】因为$y=\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，

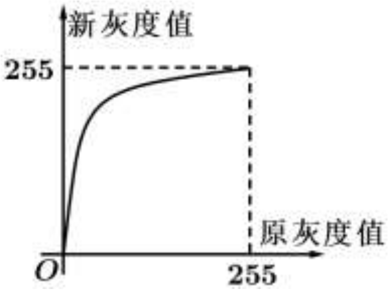
而$y=\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{12}\right)+\frac{\pi}{3}\right]$，故将函数$y=\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$的图象向右平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度即可，

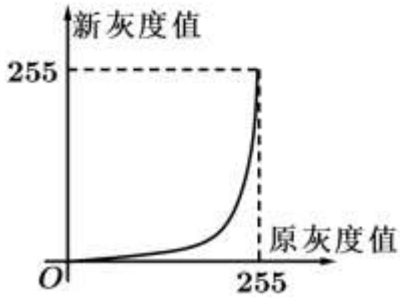
故选：A.

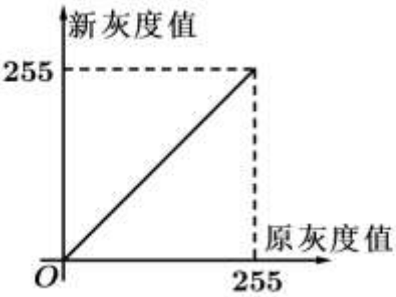
7. 在用计算机处理灰度图像（即俗称的黑白照片）时，将灰度分为256个等级，最暗的黑色用0表示，最亮的白色用255表示，中间的灰度根据其明暗渐变程度用0至255之间对应的数表示，这样可以给图像上的每个像素赋予一个“灰度值”.在处理有些较黑的图像时，为了增强较黑部分的对比度，可对图像上每个像素的灰度值进行转换，扩展低灰度级，压缩高灰度级，实现如下图所示的效果：

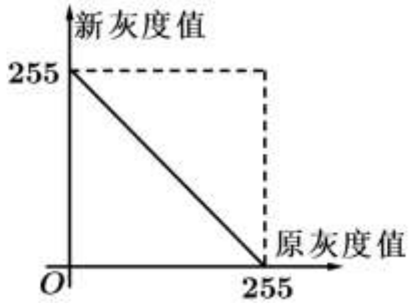
处理前　　处理后

则下列可以实现该功能的一种函数图象是（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】A

【解析】

【分析】结合函数图象以及题意逐项分析即可求出结果.

【详解】为了增强较黑部分的对比度，可对图像上每个像素的灰度值进行转换，扩展低灰度级，压缩高灰度级,结合选项只有 A 选项能够较好的达到目的，

故选：A.

8. 设双曲线 $E_1x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 的左右焦点为 F_1，F_2，左顶点为 A，点 M 是双曲线 E 在第一象限中内的一点，直线 MF_1 交双曲线 E 的左支于点 N，若 $NA//MF_2$，则 $|MF_2|=$（　　）

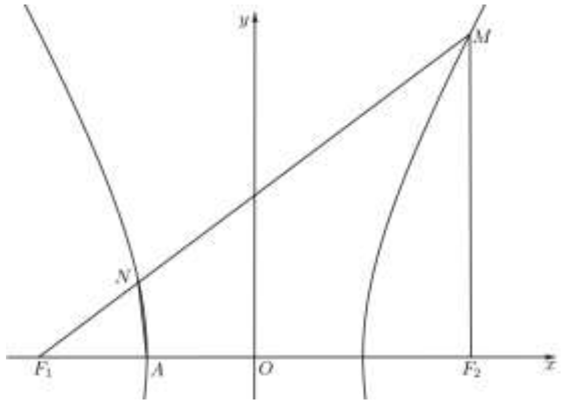
A. $\frac{7}{4}$　　B. $\frac{5}{2}$　　C. $\frac{8}{3}$　　D. $\frac{11}{4}$

【答案】B

【解析】

【分析】由题意可得 $\frac{F_1N}{F_1M}=\frac{1}{4}$，设设 $M\left(x_0,y_0\right)\left(x_0>0,y_0>0\right)$，则 $N\left(\frac{x_0-6}{4},\frac{y_0}{4}\right)$，然后将 M,N 的坐标分别代入双曲线的方程，解方程组可得 x_0,y_0，然后根据两点间的距离公式即可求出结果.

【详解】



由题意知：$F_1\left(-2,0\right),F_2\left(2,0\right),A\left(-1,0\right)$，所以 $\frac{F_1A}{F_1F_2}=\frac{1}{4}$，又因为 $NA//MF_2$，所以

$\frac{F_1N}{F_1M}=\frac{1}{4}$，设 $M\left(x_0,y_0\right)\left(x_0>0,y_0>0\right)$，则 $N\left(\frac{x_0-6}{4},\frac{y_0}{4}\right)$，且 $\begin{cases}x_0^2-\frac{y_0^2}{3}=1\\ \left(\frac{x_0-6}{4}\right)-\frac{\left(\frac{y_0}{4}\right)^2}{3}=1\end{cases}$，

解得 $\begin{cases}x_0=\frac{7}{4}\\ y_0=\frac{3\sqrt{11}}{4}\end{cases}$，所以 $\left|MF_2\right|=\sqrt{\left(\frac{7}{4}-2\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{11}}{4}\right)^2}=\frac{5}{2}$，

故选：B.

二、多选题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 下列关于空集的说法中，正确的有（　　）

A. $\varnothing\in\varnothing$　　B. $\varnothing\subseteq\varnothing$　　C. $\varnothing\in\{\varnothing\}$　　D. $\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$

【答案】BCD

【解析】

【分析】根据元素与集合之间的关系可判断 A、C 选项，根据空集是任何集合的子集可判断 B、D 选项.

【详解】A：因为$\in$用于元素与集合之间，故 A 错误；

B：因为空集是任何集合的子集，故 B 正确；

C：因为$\{\varnothing\}$中的元素是$\varnothing$，故 C 正确；

D：因为空集是任何集合的子集，故 D 正确；

故选：BCD.

10. 某公司经营四种产业，为应对市场变化，在三年前进行产业结构调整，优化后的产业结构使公司总利润不断增长，今年总利润比三年前增加一倍，调整前后的各产业利润与总利润的占比如下图所示：

则下列结论中正确的有（　　）

A. 调整后房地产业的利润有所下降　　B. 调整后医疗器械的利润增长量最大

C. 调整后生物制药的利润增长率最高　　D. 调整后金融产业的利润占比最低

【答案】BCD

【解析】

【分析】根据题目条件结合扇形图逐一分析各个选项即可得出答案.

【详解】解：设三年前的总利润为 a，则今年的总利润为 $3a$，

对于 A，调整前房地产业的利润为$45\%\cdot a$，调整后房地产业的利润为$25\%\cdot 3a=75\%\cdot a$，所以调整后房地产业的利润有所上升，故 A 错误；

对于 B，调整后医疗器械的利润增长量为$40\%\cdot 3a-20\%\cdot a=a$，

调整后房地产业的利润增长量为$0.75a-0.45a=0.3a$，

调整后金融产业的利润增长量为$10\%\cdot 3a-25\%\cdot a=0.05a$，

调整后生物制药的利润增长量为$25\%\cdot 3a-10\%\cdot a=0.65a$，

所以调整后医疗器械的利润增长量最大，故 B 正确；

对于 C，调整后生物制药的利润增长率为$\dfrac{25\%\cdot 3a-10\%\cdot a}{10\%\cdot a}=6.5$，

调整后金融产业的利润增长率为$\dfrac{10\%\cdot 3a-25\%\cdot a}{25\%\cdot a}=0.2$，

调整后房地产业的利润增长率为$\dfrac{0.75a-0.45a}{0.45a}=\dfrac{2}{3}$，

调整后医疗器械的利润增长率为$\dfrac{40\%\cdot 3a-20\%\cdot a}{20\%\cdot a}=5$，

所以调整后生物制药的利润增长率最高，故 C 正确；

对于 D，根据调整后的扇形图可知调整后金融产业的利润占比最低，故 D 正确.

故选：BCD.

11. 数列$\{a_n\}$依次为：1，$\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{5}$，$\dfrac{1}{5}$，$\dfrac{1}{5}$，$\dfrac{1}{5}$，$\dfrac{1}{5}$，$\dfrac{1}{7}$，$\dfrac{1}{7}$，$\dfrac{1}{7}$，$\dfrac{1}{7}$，$\dfrac{1}{7}$，$\dfrac{1}{7}$，$\dfrac{1}{7}$，$\dfrac{1}{9}$，$\dfrac{1}{9}$，…，其中第一项为$\dfrac{1}{1}$，接下来三项均为$\dfrac{1}{3}$，再接下来五项均为$\dfrac{1}{5}$，依此类推. 记$\{a_n\}$的前n项和为S_n，则（　　）

A. $a_{100}=\dfrac{1}{19}$

B. 存在正整数k，使得$a_k>\dfrac{1}{2\sqrt{k}-1}$

C. $S_n\le\sqrt{n}$

D. 数列$\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$是递减数列

【答案】ACD

【解析】

【分析】根据数列　规律即可求出a_{100}，即可判断 A 选项；求出数列的通项公式，做差法推出矛盾即可说明 B 选项；求出数列的前 n 项和公式，做差法即可说明 C 选项；根据数列单调性的概念，比较$\dfrac{S_n}{n},\dfrac{S_{n+1}}{n+1}$即可判断 D 选项.

【详解】A：由数列可知$\dfrac{1}{2n-1}$占了数列的$2n-1$项，且相对应的$2n-1$项的和为 1，

$1+3+5+\cdots+2n-1=n^2$，$n^2=100$，所以$n=10$，故$a_{100}=\dfrac{1}{2\times10-1}=\dfrac{1}{19}$，故 A 正确；

B：若$(n-1)^2<k\le n^2\left(k,n\in N^*\right)$，则$a_k=\dfrac{1}{2n-1}$，故$\dfrac{1}{2n-1}>\dfrac{1}{2\sqrt{k}-1}$，即$\sqrt{k}>n$，

与$(n-1)^2<k\le n^2\left(k,n\in N^*\right)$矛盾，　故 B 错误；

C：　若$k^2\le n<(k+1)^2,k,n\in N^*$，则$S_n=S_{k^2+m}=k+\dfrac{m}{2k+1},0\le m<2k+1$，

而$k+\dfrac{m}{2k+1}-\sqrt{n}$，

若$n=k^2$，则$m=0$，故$k+\dfrac{m}{2k+1}-\sqrt{n}=k-\sqrt{n}=0$；

若$k^2<n<(k+1)^2, k,n\in N^*$，则$0<m<2k+1$，

故

$$\left(k+\frac{m}{2k+1}\right)^2-\left(\sqrt{k^2+m}\right)^2=k^2+\left(\frac{m}{2k+1}\right)^2+\frac{2km}{2k+1}-k^2-m=\frac{m\left[m-(2k+1)\right]}{(2k+1)^2}<0,$$

即$\left(k+\frac{m}{2k+1}\right)^2<\left(\sqrt{k^2+m}\right)^2$，因 $k+\frac{m}{2k+1}>0,\sqrt{k^2+m}>0$，故

$k+\frac{m}{2k+1}<\sqrt{k^2+m}$，即$S_n-\sqrt{n}<0$，即$S_n<\sqrt{n}$，综上：$S_n\le\sqrt{n}$，故 C 正确；

D：因为$k^2\le n<(k+1)^2, k,n\in N^*$，则$S_n=S_{k^2+m}=k+\frac{m}{2k+1}, 0\le m<2k+1$，

所以$\frac{S_n}{n}=\frac{S_{k^2+m}}{k^2+m}=\frac{k+\frac{m}{2k+1}}{k^2+m}=\frac{2k^2+k+m}{(2k+1)(k^2+m)}$，

则$\frac{S_n}{n}-\frac{S_{n+1}}{n+1}=\frac{2k^2+k+m}{(2k+1)(k^2+m)}-\frac{2k^2+k+m+1}{(2k+1)(k^2+m+1)}$

$$=\frac{(2k^2+k+m)\left[(k^2+m)+1\right]-\left[(2k^2+k+m)+1\right](k^2+m)}{(2k+1)(k^2+m)(k^2+m+1)}$$

$$=\frac{(2k^2+k+m)(k^2+m)+(2k^2+k+m)-(2k^2+k+m)(k^2+m)-(k^2+m)}{(2k+1)(k^2+m)(k^2+m+1)}$$

$$=\frac{k^2+k}{(2k+1)(k^2+m)(k^2+m+1)}>0,$$

所以$\frac{S_n}{n}>\frac{S_{n+1}}{n+1}$，故数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是递减数列，故 D 正确.

故选：ACD.

【点睛】数列求和的方法技巧：

（1）倒序相加：用于等差数列、与二项式系数、对称性相关联的数列的求和.

（2）错位相减：用于等差数列与等比数列的积数列的求和.

（3）分组求和：用于若干个等差或等比数列的和或差数列的求和，或者奇偶项通项公式不同的数列，或者周期性数列.

（4）裂项相消

12. 已知函数$f(x)=\frac{e^x+1}{e^{2x}+k}$.则（　　）

A. 当 $k=0$ 时，$f(x)$ 是 **R** 上 减函数　B. 当 $k=1$ 时，$f(x)$ 的最大值为 $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$

C. $f(x)$ 可能有两个极值点　D. 若存在实数 a，b，使得 $g(x)=f(x+a)+b$ 为奇函数，则 $k=-1$

【答案】AB

【解析】

【分析】A：求导以后判断导函数的正负即可判断 A 选项；

B：$e^x=t>0$，则 $y=\frac{t+1}{t^2+1}$，配凑法结合均值不等式即可判断 B 选项；

C：判断极值点的个数等价于判断 $e^{2x}+2e^x-k=0$ 的根的个数，从而可判断 C 选项；

D：结合函数的对称性，以及函数图象的变换即可判断 D 选项；

【详解】A：当 $k=0$ 时，$f(x)=\frac{e^x+1}{e^{2x}}$，则 $f'(x)=\frac{-e^x-2}{e^{2x}}=-\frac{e^x+2}{e^{2x}}<0$，所以 $f(x)$ 是 **R** 上的减函数，故 A 正确；

B：当 $k=1$ 时，$f(x)=\frac{e^x+1}{e^{2x}+1}$，令 $e^x=t>0$，则

$$y=\frac{t+1}{t^2+1}=\frac{t+1}{(t+1)^2-2(t+1)+2}=\frac{1}{(t+1)-2+\frac{2}{t+1}}\le\frac{1}{2\sqrt{(t+1)\cdot\frac{2}{t+1}}-2}=\frac{1}{2\sqrt{2}-2}=\frac{\sqrt{2}+1}{2}$$

，当且仅当 $t=\sqrt{2}-1$ 时，取得最大值，所以 $f(x)$ 的最大值为 $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$，故 B 正确；

C：$f'(x)=\frac{-e^x\left(e^{2x}+2e^x-k\right)}{\left(e^{2x}+k\right)^2}$，令 $f'(x)=\frac{-e^x\left(e^{2x}+2e^x-k\right)}{\left(e^{2x}+k\right)^2}=0$，即 $e^{2x}+2e^x-k=0$，所以 $e^{2x}+2e^x=k$，令 $h(x)=e^{2x}+2e^x$，则 $h'(x)=2e^{2x}+2e^x>0$，所以 $h(x)$ 在 R 上单调递增，而 $x\to-\infty$ 时，$h(x)\to 0$，$x\to+\infty$ 时，$h(x)\to+\infty$，所以 $k\in(0,+\infty)$ 时，$e^{2x}+2e^x-k=0$ 有一个根，故 $f(x)$ 有 1 个极值点，$k\in(-\infty,0]$ 时，$e^{2x}+2e^x-k=0$ 无解，故 $f(x)$ 无极值点，故 $f(x)$ 不可能有 2 个极值点，故 C 错误；

D：因为 $g(x)=f(x+a)+b$ 为奇函数，所有 $g(x)$ 关于 $(0,0)$ 对称，将 $g(x)=f(x+a)+b$ 向右平移 a 个单位，向下平移 b 个单位可得 $f(x)$ 的图象，故 $f(x)$ 关于 $(a,-b)$ 对称，故 $f(x)+f(2a-x)=-2b$，所以 $\frac{e^x+1}{e^{2x}+k}+\frac{e^{2a-x}+1}{e^{4a-2x}+k}=-2b$，若 $k=-1$，

则 $\dfrac{e^x+1}{e^{2x}-1}+\dfrac{e^{2a-x}+1}{e^{4a-2x}-1}=-2b$，即 $\dfrac{1}{e^x-1}+\dfrac{1}{e^{2a-x}-1}=-2b$，因此 $\dfrac{1}{e^x-1}+\dfrac{e^x}{e^{2a}-e^x}=-2b$，

即 $e^{2x}-2e^x+e^{2a}=-2be^{2x}+2b\left(e^{2a}+1\right)e^x-2be^{2a}$，

因此 $\begin{cases}-2b=1\\ 2b\left(e^{2a}+1\right)=-2\\ e^{2a}=-2be^{2a}\end{cases}$，由 $-2b=1$ 和 $e^{2a}=-2be^{2a}$ 可得 $2b=-1$，代入 $2b\left(e^{2a}+1\right)=-2$，

可得 $e^{2a}+1=1$，即 $e^{2a}=0$，方程无解，故不存在实数 a， b 使之成立，故 D 错误；

故选：AB.

【点睛】（1）可导函数 $y=f(x)$在点 x_0 处取得极值的充要条件是 $f'(x_0)=0$，且在 x_0 左侧与右侧 $f'(x)$的符号不同.

（2）若 $f(x)$在$(a，b)$内有极值，那么 $f(x)$在$(a，b)$内绝不是单调函数，即在某区间上单调增或减的函数没有极值.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 抛物线 $y^2=2x$ 上两点 A， B 与坐标原点 O 构成等边三角形，则该三角形的边长为___________.

【答案】 $4\sqrt{3}$

【解析】

【分析】由抛物线和等边三角形的对称性可设 A， B 的坐标，再结合等边三角形的性质可得 $\dfrac{y_1^2}{2}=\sqrt{3}|y_1|$，求出 $|y_1|$，即可求出结果.

【详解】由抛物线和等边三角形的对称性可设 $A\left(\dfrac{y_1^2}{2},y_1\right),B\left(\dfrac{y_1^2}{2},-y_1\right)$，所以由等边三角形的性质可得 $\dfrac{y_1^2}{2}=\sqrt{3}|y_1|$，所以 $|y_1|=2\sqrt{3}$，所以该三角形的边长为 $4\sqrt{3}$，故答案为： $4\sqrt{3}$.

14. $(x+2y)(x-y)^5$ 的展开式中 x^2y^4 的系数为________.

【答案】 -15

【解析】

【分析】把 $(x-y)^5$ 按照二项式定理展开，可得 $(x+2y)(x-y)^5$ 的展开式中 x^2y^4 的系数.

【 详 解 】

$(x+$ ^{5} $\big($ $_5$ $2y$ $-$ ^{2} $^0_5$ $)$ x_5 $\frac{1}{}=$ ^{3} $\big)$，

故它的展开式中 x^2y^4 的系数为 $C_5^4-2C_5^3=-15$，故答案为： -15 .

【点睛】本题主要考查二项式定理的应用，二项展开式的通项公式，二项式系数的性质，属

于基础题.

15. 平行四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=5$，点 P 满足 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}=8$.则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=$__________.

【答案】3

【解析】

【分析】结合平面向量的加减法运算法则以及平面向量的数量积的运算律化简整理即可求出结果.

【详解】由题意可知：$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=\left(\overrightarrow{PD}-\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{AB}\right)$

$=\overrightarrow{PD}^2+\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{PD}-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}$

$=\overrightarrow{PD}^2+\overrightarrow{PD}\cdot\left(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PB}\right)-\left(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PD}\right)\cdot\overrightarrow{PD}-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}$

$=\overrightarrow{PD}^2+\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{PD}-\overrightarrow{PD}^2-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=8-5=3$
，

故答案为：3.

16. 空间四面体 $ABCD$ 中，$AB=CD=2$，$AD=BC=2\sqrt{3}$. $AC=4$，直线 BD 与 AC 所成的角为 45°，则该四面体的体积为__________.

【答案】$\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

【解析】

【分析】由条件可得 $\triangle ABC$，$\triangle DAC$ 为直角三角形，作直角三角形 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DAC$ 斜边上的高 BE，DF，作平行四边形 $BEFG$，由此可得直线 BD 与 AC 的平面角为 $\angle DBG$，$AC\perp$ 平面 DFG，解三角形确定三棱锥 D-ABC 底面 ABC 上的高，利用体积公式求体积.

【详解】∵ AB=2，BC=$2\sqrt{3}$，AC=4，∴ $\triangle ABC$ 为直角三角形，同理可得 $\triangle DAC$ 为直角三角形，

如图，作直角三角形 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DAC$ 斜边上的高 BE，DF，则 AE=CF=1

∴ E，F 是线段 AC 的两个四等分点，作平行四边形 $BEFG$，则 $BE\perp AC$，$DF\perp AC$，

由线面垂直判定定理可得 $AC\perp$ 平面 DFG，又 $AC\subset$ 平面 $ABGC$，

∴ 平面 $ABGC\perp$ 平面 DFG，在平面 DFG 内，过点 D 作 $DH\perp FG$, 垂足为 H,

由面面垂直的性质定理可得 $DH\perp$ 平面 $ABGC$，

∴ DH 为四面体 $ABCD$ 的底面 ABC 上的高，由三角函数定义可得 $DH=DF\cdot\sin\angle DFG$

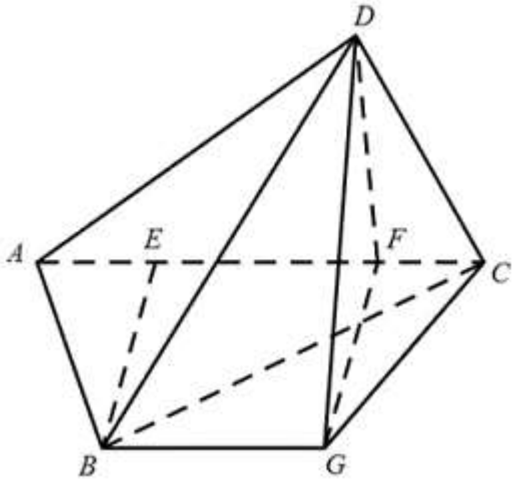
又因为 $BG/\!/AC$，所以 $BG\perp DG$， 又因为直线 BD 与 AC 所成的角为 45°，所以 $\angle DBG$=45°，

∴ $\triangle DGB$ 为等腰直角三角形，∴ GD=GB=EF=2

在 $\triangle DFG$ 中 GD=2，BE=DF=$\sqrt{3}$ 由余弦定理可求得 $\cos\angle DFG=\dfrac{1}{3}$， ∴

$\sin\angle DFG=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

所以四面体的体积$V=\dfrac{1}{3}Sh=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot DF\cdot\sin\angle DFG=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.故答案为：$\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.



【点睛】平移线段法是求异面直线所成角的常用方法，其基本思路是通过平移直线，把异面直线的问题化归为共面直线问题来解决，具体步骤如下：

①平移：平移异面直线中的一条或两条，作出异面直线所成的角；

②认定：证明作出的角就是所求异面直线所成的角；

③计算：求该角的值，常利用解三角形；

④取舍：由异面直线所成的角的取值范围是$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，当所作的角为钝角时，应取它的补角作为两条异面直线所成的角.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，满足$S_n=1-na_n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设数列$\left\{\dfrac{(-1)^n}{a_n}\right\}$的前$n$项和为$T_n$，求$T_{2n}$的表达式.

【分析】（1）根据$a_n=\begin{cases}S_1,n=1\\S_n-S_{n-1},n\geq 2\end{cases}$，即可求出数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）利用分组求和法以及等差数列的前n和公式即可求出结果.

【详解】（1）当$n=1$时，$a_1=S_1=1-a_1$，即$a_1=\dfrac{1}{2}$，

当$n\geq 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=1-na_n-1+(n-1)a_{n-1}$，即$(n+1)a_n=(n-1)a_{n-1}$，因此

$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n-1}{n+1}$,

所以 $a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\frac{a_{n-2}}{a_{n-3}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot a_1=\frac{n-1}{n+1}\times\frac{n-2}{n}\times\frac{n-3}{n-1}\times\cdots\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}$

$a_n=\frac{1}{n(n+1)}$，经检验，$n=1$ 时成立，所以 $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$；

（2）$\frac{(-1)^n}{a_n}=(-1)^n n(n+1)=(-1)^n(n^2+n)$，

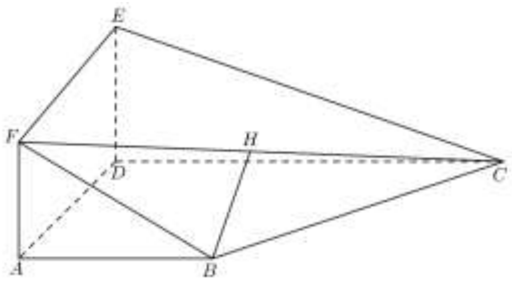
所以

$T_{2n}=-(1^2+1)+(2^2+2)-(3^2+3)+(4^2+4)-\cdots-\left[(2n-1)^2+(2n-1)\right]+\left[(2n)^2+2n\right]$

$=-1^2+2^2-3^2+4^2-\cdots-(2n-1)^2+(2n)^2-1+2-3+4-\cdots-(2n-1)+2n$

$=3+7+\cdots+(4n-1)+n=\frac{\left[3+(4n-1)\right]n}{2}+n=2n^2+2n$

18. 在如图所示的六面体 $ABCDEF$ 中，矩形 $ADEF\perp$ 平面 $ABCD$，$AB=AD=AF=1$，$CD=2$，$CD\perp AD$，$AB//CD$.



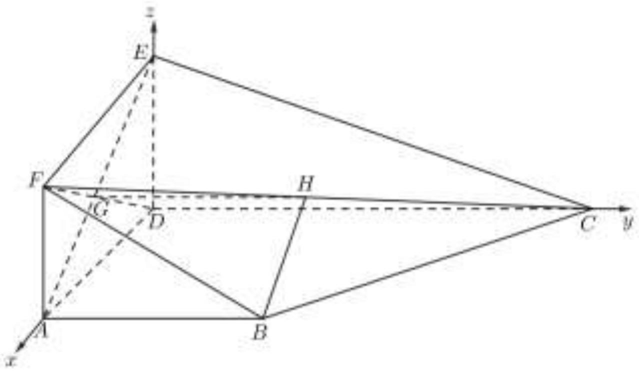
（1）设 H 为 CF 中点，证明：$BH//$ 平面 $ADEF$；

（2）求二面角 $B-CF-E$ 大小的正弦值.

【分析】（1）证得 $HB//AG$，结合线面平行的判定定理即可证出结论；

（2）建立空间直角坐标系，利用空间向量夹角的坐标公式求出面角 $B-CF-E$ 大小的余弦值，进而根据同角的平方关系以及二面角的范围即可求出结果.

【详解】



（1）连接DF, AE，相交于G，因为矩形$ADEF$，所以G是DF的中点，又因为H为CF中点，所以$GH//DC$，且$GH=\frac{1}{2}DC$，又因为$CD=2$，$AB=1$，$AB//CD$，所以$GH//AB$，且$GH=AB$，所以四边形$GHBA$为平行四边形，故$HB//AG$，又因为$HB\not\subset$平面$ADEF$，$AG\subset$平面$ADEF$，因此$BH//$平面$ADEF$；

（2）因为矩形$ADEF\perp$平面$ABCD$，且矩形$ADEF\cap$平面$ABCD=AD$，又$CD\perp AD$，所以$CD\perp$平面$ADEF$，又因为$ED\perp AD$，所以ED,CD,AD两两垂直，故以D坐标原点，DA为x轴，DC为y轴，DE为z轴，建立如图所示空间直角坐标系，所以

$B(1,1,0), C(0,2,0), E(0,0,1), F(1,0,1)$,

设平面BCF的法向量为$\vec{n}=(x_1,y_1,z_1)$，且$\overrightarrow{BC}=(-1,1,0), \overrightarrow{CF}=(1,-2,1)$，因此

$\begin{cases}\overrightarrow{BC}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{CF}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$，则$\begin{cases}-x_1+y_1=0\\ x_1-2y_1+z_1=0\end{cases}$，取$x_1=1$，则$\vec{n}=(1,1,1)$，

设平面CFE的法向量为$\vec{m}=(x_2,y_2,z_2)$，且$\overrightarrow{CE}=(0,-2,1), \overrightarrow{CF}=(1,-2,1)$，因此

$\begin{cases}\overrightarrow{CE}\cdot\vec{m}=0\\ \overrightarrow{CF}\cdot\vec{m}=0\end{cases}$，则$\begin{cases}-2y_2+z_2=0\\ x_2-2y_2+z_2=0\end{cases}$，取$y_2=1$，则$\vec{m}=(0,1,2)$，

则$\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{1\times0+1\times1+1\times2}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\times\sqrt{0^2+1^2+2^2}}=\frac{3}{\sqrt{3}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$,

设二面角$B-CF-E$的平面角为α，又因为二面角的平面角的范围是$[0,\ \pi]$，所以

$\sin\alpha\in[0,1]$，故$\sin\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{5}$，所以二面角$B-CF-E$大小的正弦值

$\frac{\sqrt{10}}{5}$.

19. 在平面凸四边形$ABCD$中，$\angle BAD=30°$，$\angle ABC=135°$，$AD=6$，$BD=5$，$BC=3\sqrt{2}$.

（1）求$\cos\angle DBA$.　　（2）求CD长.

【分析】（1）在$\triangle ABD$中根据正弦定理求解$\sin\angle DBA$，再求解$\cos\angle DBA$即可；

（2）先求解$\cos\angle DBC$，再根据余弦定理求解CD即可

【详解】（1）在$\triangle ABD$中，由正弦定理$\frac{AD}{\sin\angle ABD}=\frac{BD}{\sin\angle A}$，可得

$\sin\angle ABD=\dfrac{AD\cdot\sin\angle BAD}{BD}=\dfrac{6\times\dfrac{1}{2}}{5}=\dfrac{3}{5}$，故 $\cos\angle DBA=\pm\sqrt{1-\sin^2\angle DBA}=\pm\dfrac{4}{5}$，

又当 $\cos\angle DBA=-\dfrac{4}{5}$ 时，因为 $\cos\angle DBA=-\dfrac{4}{5}<-\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\cos\dfrac{3\pi}{4}$，此时

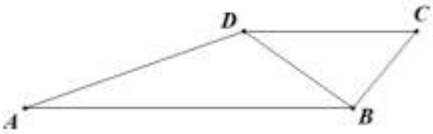
$\angle DBA>\dfrac{3\pi}{4}=\angle ABC$，不能构成凸四边形，故 $\cos\angle DBA=\dfrac{4}{5}$

（2）在 $\triangle BCD$ 中，$\cos\angle DBC=\cos\left(\angle ABC-\angle ABD\right)=\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}-\angle ABD\right)$

$=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\angle ABD+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\angle ABD=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{5}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{10}$，

故 $CD^2=BD^2+BC^2-2BD\cdot BC\cos\angle DBC=25+18-30\sqrt{2}\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{10}\right)=49$

故 $CD=7$



【点睛】本题主要考查了解三角形在求解几何图形中的应用，需要根据题意分析边角关系，再在合适的三角形中利用正余弦定理求解，属于中档题

20. 在某班学生举办的庆祝建党一百周年活动中，指定 4 名同学依次在分别写有“建”，“党”，“百”，“年”四字的四张卡牌中有放回地随机抽取一张并记录结果.

（1）求最后的结果中同时有“建”“党”两字的概率；

（2）用 X 表示结果中这四个字各出现次数中的最大值，求 EX .

【分析】（1）结合两个计数原理以及古典概型的概率公式即可求出结果；

（2）求出 X 的可能取值，进而求出对应的概率，结合期望的概念即可求出结果.

【详解】（1）因为有放回，所以每位同学都有四种选择，故共有 $4\times4\times4\times4=256$ 种，

其中最后的结果中没有“建”“党”两字，有 $2\times2\times2\times2=16$ 种，

只有“建”或者只有“党”字，有 $2\times\left(C_4^1\times2\times2\times2+C_4^2\times2\times2+C_4^3\times2+1\right)=130$ 种，

所以最后的结果中同时有“建”“党”两字的概率为 $\dfrac{256-16-130}{256}=\dfrac{55}{128}$；

（2）X 的可能取值为：$4,3,2,1$，

所以 $P\left(X=4\right)=\dfrac{4}{256}=\dfrac{1}{64}$，　$P\left(X=3\right)=\dfrac{C_4^3C_4^1C_3^1}{2\,5\,6}=\dfrac{3}{1}$

$P\left(X=2\right)=\frac{C_4^2C_4^2+C_4^1C_4^2A_3^2}{256}=\frac{45}{64}$ $\qquad P\left(X=1\right)=\frac{A_4^4}{256}=\frac{3}{3}$

所以$EX=4\times\frac{1}{64}+3\times\frac{3}{16}+2\times\frac{45}{64}+1\times\frac{3}{32}=\frac{17}{8}$.

21. 已知函数 $f\left(x\right)=2\left(x-2\right)\ln x+ax^2-1$.

（1）当$a=0$时，求曲线$y=f\left(x\right)$在点$\left(1,f\left(1\right)\right)$处的切线方程；

（2）若$f\left(x\right)\geq 0$恒成立，求实数a的取值范围.

【分析】(1）对函数进行求导得到$f'(x)=2\ln x-\frac{4}{x}+2$，再根据导数的几何意义，即可得到答案；

（2）先根据$f(1)\geqslant 0$得到$a\geqslant 1$，缩小a的取值范围，再利用放缩法证明$f(x)\geq 0$在$a\geqslant 1$恒成立，即可得到答案；

【详解】(1）当$a=0$时，$f(x)=2(x-2)\cdot\ln x-1$，$f'(x)=2(\ln x+\frac{x-2}{x})=2\ln x-\frac{4}{x}+2$，

$\because$ $f'(1)=-2, f(1)=-1$，$\therefore$切点为$(1,-1)$，斜率为-2，

$\therefore$曲线在点$\left(1,f\left(1\right)\right)$处的切线方程：$2x+y-1=0$.

（2）$\because$ $f(x)\geq 0$恒成立，$\therefore$ $f(1)=a-1\geqslant 0\Rightarrow a\geqslant 1$,

$\therefore f(x)=2(x-2)\ln x+ax^2-1\geqslant 2(x-2)\cdot\ln x+x^2-1$，

令$g(x)=2(x-2)\cdot\ln x+x^2-1$，$g'(x)=2\left(\ln x+\frac{x-2}{x}\right)+2x$，

$g''(x)=2(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})+2>0$在$x>0$恒成立，$\therefore$ $g'(x)$在$(0,+\infty)$单调递增，且$g'(1)=0$，

$\therefore$ $g'(x)<0\Rightarrow 0<x<1$，$g'(x)>0\Rightarrow x>1$，$\therefore$ $g(x)$在$(0,1)$单调递减，在$(1,+\infty)$单调递增，

$\therefore$ $g(x)\geq g(1)=0$，$\therefore$ $f(x)\geq 0$恒成立，$\therefore$实数a的取值范围$a\geq 1$.

22. 已知椭圆E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，点$A\left(0,-1\right)$是椭圆$E$短轴的一个四等分点.

（1）求椭圆E的标准方程；

（2）设过点A且斜率为k_1的动直线与椭圆E交于M，N两点，且点$B\left(0,2\right)$，直线BM，BN分别交$\odot C$：$x^2+\left(y-1\right)^2=1$于异于点B的点P，Q，设直线PQ的斜率为k_2，求实数λ，使得$k_2=\lambda k_1$，恒成立.

【分析】（1）根据点 $A(0,-1)$ 是椭圆 E 短轴的一个四等分点，求得 b，再根据离心率和 $a^2=b^2+c^2$，即可求得 a，从而得出答案；

（2）设 $M\left(x_1,y_1\right),N\left(x_2,y_2\right),P\left(x_P,y_P\right),Q\left(x_Q,y_Q\right)$，直线 MN 的方程为 $y=k_1x-1$，则直线 BM 的方程为 $y=\dfrac{y_1-2}{x_1}x+2$，与 $x^2+(y-1)^2=1$ 联立，利用韦达定理可求得点 P，Q 的坐标，从而得出直线 PQ 的斜率 k_2，整理可得出结论.

【详解】解：（1）因为点 $A(0,-1)$ 是椭圆 E 短轴的一个四等分点，所以 $b=2$，

又 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，且 $a^2=b^2+c^2$，则 $2c^2=4+c^2$，所以 $c^2=4$，$a^2=8$，

所以椭圆 E 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$；

（2）设 $M\left(x_1,y_1\right),N\left(x_2,y_2\right),P\left(x_P,y_P\right),Q\left(x_Q,y_Q\right)$，直线 MN 的方程为 $y=k_1x-1$，

则直线 BM 的方程为 $y=\dfrac{y_1-2}{x_1}x+2$，与 $x^2+(y-1)^2=1$ 联立，

得：$\left({x_1}^2+\left(y_1-2\right)^2\right)x^2+2x_1\left(y_1-2\right)x=0$，

由 $x_P\neq 0$，且点 $B(0,2)$ 在 $\odot C$ 上，得 $x_P=\dfrac{-2x_1\left(y_1-2\right)}{{x_1}^2+\left(y_1-2\right)^2}$，

又 $\dfrac{{x_1}^2}{8}+\dfrac{{y_1}^2}{4}=1$，即 ${x_1}^2=8-2{y_1}^2$，代入上式得 $x_P=\dfrac{-2x_1\left(y_1-2\right)}{8-2{y_1}^2+\left(y_1-2\right)^2}=\dfrac{2x_1}{y_1+6}$，

$y_P=\dfrac{y_1-2}{x_1}x_P+2=4-\dfrac{16}{y_1+6}$，

即点 $P\left(\dfrac{2x_1}{y_1+6},4-\dfrac{16}{y_1+6}\right)$，同理 $Q\left(\dfrac{2x_2}{y_2+6},4-\dfrac{16}{y_2+6}\right)$，

则 $k_2=\dfrac{y_P-y_Q}{x_P-x_Q}=\dfrac{\left(4-\dfrac{16}{y_1+6}\right)-\left(4-\dfrac{16}{y_2+6}\right)}{\dfrac{2x_1}{y_1+6}-\dfrac{2x_2}{y_2+6}}=\dfrac{8\left(y_1-y_2\right)}{x_1y_2-x_2y_1+6x_1-6x_2}$，

将 $y_1=k_1x_1-1,y_2=k_1x_2-1$ 代入上式，

得 $k_2=\dfrac{8k_1\left(x_1-x_2\right)}{x_1\left(k_1x_2-1\right)-x_2\left(k_1x_1-1\right)+6x_1-6x_2}=\dfrac{8k_1\left(x_1-x_2\right)}{5\left(x_1-x_2\right)}=\dfrac{8}{5}k_1$，

所以$\lambda=\dfrac{8}{5}$时，$k_2=\lambda k_1$，恒成立.

【点睛】本题考查了根据离心率求椭圆的标准方程及直线与椭圆、圆的位置关系，考查了计算能力和逻辑推理能力，难度较大.