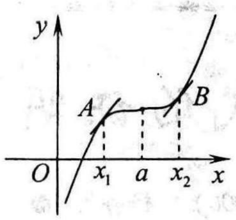
几类常见函数对称中心的导数求法

湖北省广水市第一中学(432700)　刘才华

函数对称中心的定义为:若 $\forall x \in D, \exists a、b \in \mathbf{R}$,都有 $f(x)+f(2a-x)=2b$ 成立,则称点 (a,b) 为函数 $y=f(x)(x \in D)$ 的对称中心.若能先求出 a,再化简函数值的和,就可以求出 b,继而得到对称中心 (a,b).

引理　已知函数 $y=f(x)$ 是连续可导的函数,且图象关于点 (a,b) 成中心对称,对于图象上任意的关于点 (a,b) 对称的两点 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$,都有 $f'(x_1)=f'(x_2)$(即切线斜率相等).



证明　如图示,$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$ 关于点 (a,b) 对称,则 $x_1+x_2=2a$,即 $x_2=2a-x_1$ 且 $f(x_1)+f(2a-x_1)=2b$.

$$\text{则} f'(x_1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[2b-f(2a-x_1-\Delta x)]-[2b-f(2a-x_1)]}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2a-x_1)-f(2a-x_1-\Delta x)}{\Delta x}$$

$=f'(2a-x_1)$(根据导数的定义)

$=f'(x_2)$.

因此,当函数 $y=f(x)$ 图象上两点 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$ 关于点 (a,b) 对称时,由结论,则有 $f'(x_1)=f'(x_2)$.若设导数值为 k,则 x_1、x_2 可以视为方程 $f'(x)=k$ 的两根,这样求函数对称中心的过程,依据此引理,就可以分为下面三个步骤:

① 求函数的导数 $f'(x)$,取导数值为 k,建立方程 $f'(x)=k$;

② 求方程 $f'(x)=k$ 的两根和 $x_1+x_2=2a$(常数),算出 a;

③ 化简 $f(x)+f(2a-x)=2b$(常数),求出 b.

这样我们就得到函数 $y=f(x)$ 的对称中心 (a,b).

下面,我们可以用这一方法,求几个常见类型函数的对称中心.

例1　函数 $f(x)=x^3-3x^2-2$ 的图象是中心对称图象,其对称中心为____.

解　函数 $f(x)=x^3-3x^2-2$ 的导数为 $f'(x)=3x^2-6x$,

令 $f'(x)=3x^2-6x=k$,且方程 $3x^2-6x-k=0$ 的两根为 x_1、x_2,则 $x_1+x_2=2=2a$,$\therefore a=1$.

又 $f(x)+f(2-x)=x^3-3x^2-2+(2-x)^3-3(2-x)^2-2=-4=2b$,即 $b=-2$.

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 图象的对称中心为 $(1,-2)$.

例2　求函数 $f(x)=\dfrac{a^x}{a^x+\sqrt{a}}$ 的对称中心.

解　设 $f'(x)=\dfrac{a^x(a^x+\sqrt{a})\ln a-a^{2x}\ln a}{(a^x+\sqrt{a})^2}=k(k\neq 0)$,设根为 x_1、x_2,则

$ka^{2x}+\sqrt{a}(2k-\ln a)a^x+ka=0$.

令 $a^x=t$,则 $kt^2+\sqrt{a}(2k-\ln a)t+ka=0$ 对应的根为 $a^{x_1}=t_1$、$a^{x_2}=t_2$.

则 $t_1t_2=a$,$\therefore a^{x_1}a^{x_2}=a^{x_1+x_2}=a$,

$\therefore$ 两根和 $x_1+x_2=1=2m$,即 $m=\dfrac{1}{2}$.

又 $f(x)+f(1-x)=\dfrac{a^x}{a^x+\sqrt{a}}+\dfrac{a^{1-x}}{a^{1-x}+\sqrt{a}}=1=2n$,

$\therefore n=\dfrac{1}{2}$.

$\therefore$ 函数 $f(x)=\dfrac{a^x}{a^x+\sqrt{a}}$ 的对称中心为 $(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$.

例3　求函数 $f(x)=\sin(2x+\dfrac{\pi}{4})$ 的对称中心

解　题意,$f'(x)=2\cos(2x+\dfrac{\pi}{4})$,取 $f'(x)=2\cos(2x+\dfrac{\pi}{4})=k$,设其中两根为 x_1、x_2,则 $2\cos(2x_1+\dfrac{\pi}{4})=2\cos(2x_2+\dfrac{\pi}{4})=k$,

即 $\cos(2x_1+\dfrac{\pi}{4})=\cos(2x_2+\dfrac{\pi}{4})$,

解三角方程得两根关系:

$2x_1+\dfrac{\pi}{4}=2n\pi\pm(2x_2+\dfrac{\pi}{4})(n\in\mathbf{Z})$.

(去掉成周期性变化关系的一组,$\because$ 间隔周期的点导数值一定相等,但不一定关于对称中心对称).

$\therefore 2x_1+\dfrac{\pi}{4}=2n\pi-(2x_2+\dfrac{\pi}{4})$,移项得两根和 $x_1+x_2=n\pi-\dfrac{\pi}{4}=2a$,

$\therefore a=\dfrac{1}{2}n\pi-\dfrac{\pi}{8}(n\in\mathbf{Z})$;

又 $f(x)+f(n\pi-\dfrac{\pi}{4}-x)$

$=\sin(2x+\dfrac{\pi}{4})+\sin2[(n\pi-\dfrac{\pi}{4}-x)+\dfrac{\pi}{4}]$

$= \sin(2x+\frac{\pi}{4})+\sin2[(n\pi-\frac{\pi}{4}-x)+\frac{\pi}{4}]$

$= \sin(2x+\frac{\pi}{4})+\sin(2n\pi-\frac{\pi}{4}-2x)=0=2b$,

$\therefore b=0$.

$\therefore$ 函数 $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{4})$ 的对称中心为 $(\frac{1}{2}n\pi-\frac{\pi}{8},0)(n\in\mathbf{Z})$.

综合上述,我们都以导数和方程为工具,研究和解决了几类函数对称中心的问题,为大家提供了一种新思路和新方向,也希望师生们多钻研,多思考,多总结归纳,增强学习和研究数学的兴趣,提高解题能力.

例谈双元不等式的证明方法

福建省泉州五中(362000) 杨苍洲

不等式的证明是高中数学的一种常见题型,由于题型多变、方法多样、技巧性强,这类试题往往成为考试的难点.实际上证明不等式也有规律可循,在证明不等式时,要依据题设和待证不等式的结构特点、内在联系选择适当的证明方法.下面我们介绍两种以导数为工具的证明不等式的技巧.

1.创设比值消元法

例1 (2011年卓越联盟)(1)设 $f(x)=x\ln x$,求 $f'(x)$;

(2)设 $0<a<b$,求常数 c,使得 $\frac{1}{b-a}\int_a^b|\ln x-c|\,dx$ 取得最小值;

(3)记(2)中的最小值为 $m_{a,b}$,证明:$m_{a,b}<\ln2$.

解析 本题考查导数、定积分、绝对值性质,考查分类讨论、化归与转化思想.

(1)易得:$f'(x)=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$;

(2)易得:当 $c=\ln\frac{a+b}{2}$ 时,$\frac{1}{b-a}\int_a^b|\ln x-c|\,dx$ 取得最小值.

(3)$c=\ln\frac{a+b}{2}$ 代入得 $m_{a,b}=\frac{1}{b-a}(a\ln a+b\ln b-(a+b)\ln\frac{a+b}{2})$,

即证 $\frac{1}{b-a}(a\ln a+b\ln b-(a+b)\ln\frac{a+b}{2})<\ln2$,

即证 $a\ln a+b\ln b-(a+b)\ln\frac{a+b}{2}<(b-a)\ln2$.

自然的想法是使 a,b“齐次化”,创设比值进行消元处理.

即证 $a(\ln a-\ln\frac{a+b}{2}+\ln2)<a(\ln2-\ln b+\ln\frac{a+b}{2})$,

即证 $a\ln\frac{4a}{a+b}<b\ln\frac{a+b}{b}$,

即证 $\frac{b}{a}\ln\frac{a+b}{b}-\ln\frac{4a}{a+b}>0$.

令 $t=\frac{b}{a}>1$,只需证明 $h(t)=t\ln\frac{t+1}{t}-\ln\frac{4}{t+1}>0(t>1)$.

因为 $h'(t)=\ln\frac{t+1}{t}+t\cdot\frac{t}{t+1}\cdot(-\frac{1}{t^2})-\frac{t+1}{4}\cdot\frac{-4}{(t+1)^2}=\ln\frac{t+1}{t}>0$,

所以 $h(t)=t\ln\frac{t+1}{t}-\ln\frac{4}{t+1}>0$,在 $(1,+\infty)$ 上是单调递增函数,故对于任意 $t>1$,都有 $h(t)>h(1)=\ln2-\ln\frac{4}{2}=0$.得证.

变式训练1 已知函数 $f(x)=ax^2+bx+c+4\ln x$ 的极值点为1和2.

(Ⅰ)求实数 a,b 的值;

(Ⅱ)试讨论方程 $f(x)=3x^2$ 根的个数;

(Ⅲ)设 $h(x)=\frac{1}{4}f(x)-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x$,斜率为 k 的直线与曲线 $y=h(x)$ 交于 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)(x_1<x_2)$ 两点,试比较 $\frac{1}{k}$ 与 $\frac{x_1+x_2}{2}$ 的大小,并给予证明.

答案:(Ⅰ)$a=1,b=-6$;

(Ⅱ)当 $c=\frac{7}{2}+4\ln2$ 时,方程只有一解;

当 $c>\frac{7}{2}+4\ln2$ 时,方程有两解;

当 $c<\frac{7}{2}+4\ln2$ 时,方程无解.

(Ⅲ)$\frac{1}{k}<\frac{x_1+x_2}{2}$.