

§3.2 导数与函数的单调性

复习目标

1. 结合实例，借助几何直观了解函数的单调性与导数的关系；
2. 能利用导数研究函数的单调性，会求函数的单调区间；
3. 会根据函数的单调性比较大小、解不等式、求参数的取值范围.

课前热身

1. 函数 $f(x)=(x-3)e^x$ 的递增区间是()
 A. $(-\infty, 2)$ B. $(0, 3)$ C. $(1, 4)$ D. $(2, +\infty)$.
2. 已知函数 $f(x)=x^2+\frac{a}{x}$ ，若函数 $f(x)$ 在 $[2, +\infty)$ 上单调递增，则实数 a 的取值范围为()
 A. $(-\infty, 16)$ B. $(-\infty, 16]$ C. $(-\infty, -8]$ D. $(-\infty, -16] \cup [16, +\infty)$
3. 已知 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的函数，导函数 $f'(x)$ 满足 $f'(x) < f(x)$ 对于 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立，则()
 A. $f(2) > e^2 f(0)$, $f(2021) > e^{2021} f(0)$ B. $f(2) < e^2 f(0)$, $f(2021) > e^{2021} f(0)$
 C. $f(2) > e^2 f(0)$, $f(2021) < e^{2021} f(0)$ D. $f(2) < e^2 f(0)$, $f(2021) < e^{2021} f(0)$
4. (多选) 已知函数 $f(x)=x \ln(1+x)$ ，则()
 A. $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增 B. $f(x)$ 有两个零点
 C. 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(-\frac{1}{2}, f(-\frac{1}{2}))$ 处的切线的斜率为 $-1-\ln 2$ D. $f(x)$ 是偶函数
5. (多选) 若 $0 < x_1 < x_2 < 1$ ，则()
 A. $x_1 + \ln x_2 > x_2 + \ln x_1$ B. $x_1 + \ln x_2 < x_2 + \ln x_1$ C. $x_2 e^{x_1} > x_1 e^{x_2}$ D. $x_2 e^{x_1} < x_1 e^{x_2}$
6. 已知函数 $f(x)=(x^2+ax+1)e^x$ ，讨论 $f(x)$ 的单调性。

知识梳理

典例研究**考点一 不含参数的函数的单调性**

例 1. (1) 函数 $f(x)=x^2-2\ln x$ 的单调递减区间是()

- A. (0,1) B. (1, +∞) C. (-∞, 1) D. (-1,1)

(2) 已知定义在区间 $(-\pi, \pi)$ 上的函数 $f(x)=x\sin x+\cos x$, 则 $f(x)$ 的递增区间是_____.

考点二 含参数的函数的单调性

例 2. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}ax^2-(a+1)x+\ln x$, 试讨论函数 $y=f(x)$ 的单调性.

考点三 函数单调性的应用

例 3. (1) 已知函数 $f(x)=x\sin x$, $x\in\mathbf{R}$, 则 $f\left(\frac{\pi}{5}\right)$, $f(1)$, $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ 的大小关系为()

- A. $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)>f(1)>f\left(\frac{\pi}{5}\right)$ B. $f(1)>f\left(-\frac{\pi}{3}\right)>f\left(\frac{\pi}{5}\right)$ C. $f\left(\frac{\pi}{5}\right)>f(1)>f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ D. $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)>f\left(\frac{\pi}{5}\right)>f(1)$

(2) 已知 $y=f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的函数, 且 $f(2)=5$, 对任意的 x 都有 $f'(x)<\frac{1}{2}$, 则 $f(x)<\frac{1}{2}x+4$ 的解集是_____.

例 4. 若函数 $f(x)=kx-\ln x$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 则 k 的取值范围是()

- A. $(-\infty, -1)$ B. $(-\infty, -1]$ C. $(1, +\infty)$ D. $[1, +\infty)$

变式: (1) 若 $f(x)$ 的增区间为 $(1, +\infty)$, 则 $k=_____$;

(2) 若 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上递减, 则 k 的取值范围是_____;

(3) 若 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上不单调, 则 k 的取值范围是_____;

(4) 若 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上存在减区间, 则 k 的取值范围是_____;

(5) 若 $f(x)$ 在 $(1,2)$ 上单调, 则 k 的取值范围是_____.

课堂小结

跟踪反馈

- 下列函数中，在 $(0, +\infty)$ 上单调递增的是()

A. $f(x)=\sin 2x$ B. $g(x)=x^3-x$ C. $h(x)=xe^x$ D. $m(x)=-x+\ln x$
- 已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+2e^x-2e^{-x}$ ，若 $f(a-1)+f(2a^2)\leq 0$ ，则实数 a 的取值范围是()

A. $(-\infty, -1]$ B. $[\frac{1}{2}, +\infty)$ C. $(-1, \frac{1}{2})$ D. $[-1, \frac{1}{2}]$
- (多选) 定义在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上的函数 $f(x)$ ，已知 $f'(x)$ 是它的导函数，且恒有 $\cos x f'(x) + \sin x f(x) < 0$ 成立，则有()

A. $f(\frac{\pi}{6}) > \sqrt{2}f(\frac{\pi}{4})$ B. $\sqrt{3}f(\frac{\pi}{6}) > f(\frac{\pi}{3})$ C. $f(\frac{\pi}{6}) > \sqrt{3}f(\frac{\pi}{3})$ D. $\sqrt{2}f(\frac{\pi}{6}) > \sqrt{3}f(\frac{\pi}{4})$
- 函数 $y=2\ln x-3x^2$ 的单调递增区间为_____.
- 设 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数，当 $x < 0$ 时， $f(x) + xf'(x) < 0$ ，且 $f(-4) = 0$ ，则不等式 $xf(x) > 0$ 的解集为_____.
- 讨论下列函数的单调性.

(1) $f(x) = (x-a-1)e^x - (x-a)^2$. (2) $f(x) = x - \frac{1}{x} - a \ln x$ ($a \in \mathbf{R}$)

纠错补偿

1. 订正： 题号

2. 补偿训练：