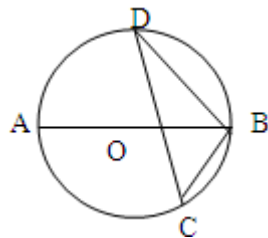


期中热点填空题集训

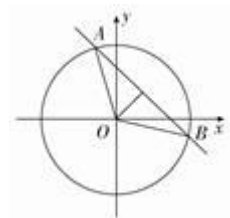
班级_____ 姓名_____ 学号_____ 得分_____

一、填空题

- 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\log_2 x|, & x > 0 \\ -x^2 - 2x, & x \leq 0 \end{cases}$, 关于 x 的方程 $f(x) = m (m \in \mathbb{R})$ 有四个不同的实数解 x_1, x_2, x_3, x_4 则 $x_1 x_2 x_3 x_4$ 的取值范围为_____.
- 已知定义域为 $\mathbb{R}$ 的函数 $f(x)$ 满足: 当 $x \in (-1, 1]$ 时, $f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{x+1}, & -1 < x \leq 0 \\ 2^{2-x} - 2, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$ 且 $f(x+2) = f(x)$ 对任意的 $x \in \mathbb{R}$ 恒成立. 若函数 $g(x) = f(x) - m(x+1)$ 在区间 $[-1, 5]$ 内有 6 个零点, 则实数 m 的取值范围是_____.
- 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是角 A, B, C 的对边, 且 $a + c = 2b$, 则角 B 的取值范围为_____.
- 已知在平面四边形 $ABCD$ 中, $AB = \sqrt{2}, BC = 2, AC \perp CD, AC = CD$, 则四边形 $ABCD$ 的面积的最大值为_____.
- 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $c \cdot \cos B = a + \frac{1}{2}b$, $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{\sqrt{3}}{12}c$, 则边 c 的最小值为_____.
- 如图, AB 是圆 O 的直径, C, D 是圆 O 上的点, $\angle CBA = 60^\circ$, $\angle ABD = 45^\circ$, $\overrightarrow{CD} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{BC}$, 则 $x + y =$ _____.
- 设 $\vec{a} = (\sin x, \sin x)$, $\vec{b} = (-\sin x, m+1)$, 若 $\vec{a} \cdot \vec{b} = m$ 在区间 $(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$ 上有三个根, 则 m 的范围为_____.
- 已知 $\vec{a} = (1, 3)$, $\vec{b} = (2 + \lambda, 1)$, 且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 成锐角, 则实数 λ 的取值范围是_____.

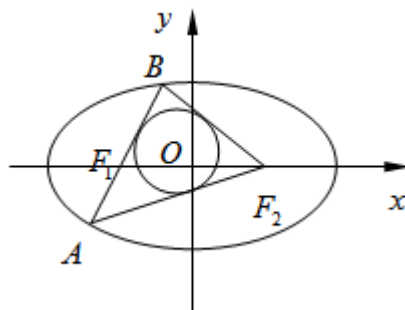


9. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB \perp AC$, $AB = \frac{1}{t}$, $AC = t$, P 是 $\triangle ABC$ 所在平面内一点, 若 $\overrightarrow{AP} = \frac{4\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$, 则 $\triangle PBC$ 面积的最小值为_____.
10. 若直线 $l: x = my + \sqrt{2}$ 与曲线 $C: y = \sqrt{1-x^2}$ 相交于 A, B 两点, O 为坐标原点, 当 $\triangle AOB$ 的面积取最大值时, 实数 m 的取值_____.
11. 若正数 a, b 满足 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$, 则 $\frac{1}{a-1} + \frac{4}{b-1}$ 的最小值为_____.
12. 已知函数 $f(x) = x^2 + 2\sqrt{a}x - b + 1$ (a, b 为正实数)只有一个零点, 则 $\frac{1}{a} + \frac{2a}{b+1}$ 的最小值为_____.
13. 过点 $P(-1,1)$ 作圆 $C: (x-t)^2 + (y-t+2)^2 = 1$ ($t \in \mathbb{R}$)的切线, 切点分别为 A, B , 则 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 的最小值为_____.
14. 一束光线从点 $A(-1,1)$ 出发, 经 x 轴反射到圆 $C: (x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$ 上的最短路径的长度是_____.
15. 如下图, 直线 $x + y - k = 0$ ($k > 0$)与圆 $O: x^2 + y^2 = 4$ 交于不同的两点 A, B , 点 O 是坐标原点, 且有 $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| \geq \frac{\sqrt{3}}{3} |\overrightarrow{AB}|$, 则实数 k 的取值范围是_____.
16. 由直线 $y = x + 1$ 上的任意一点向圆 $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 2$ 引切线, 则切线长的最小值为_____;
17. 已知圆 $C: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 1$ 和两点 $A(-m, 0)$, $B(m, 0)$ ($m > 0$), 若圆 C 上存在点 P 使得 $\angle APB = 90^\circ$, 则 m 的最大值为_____.

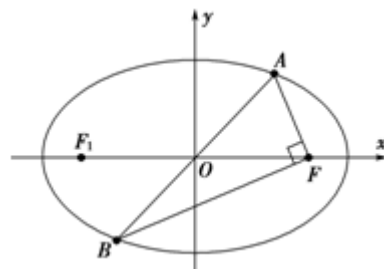


18. $\triangle ABC$ 的垂心 H 在其内部, $\angle A = 30^\circ$, $AH = \sqrt{3}$, 则 $\sqrt{3}BH + CH$ 的取值范围是_____.

19. 如图, 设椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的左右焦点分别为 F_1 、 F_2 , 过焦点 F_1 的直线交椭圆于 A 、 B 两点, 若 $\triangle ABF_2$ 的内切圆的面积为 π , 设 A 、 B 两点的坐标分别为 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$, 则 $|y_1 - y_2|$ 值为_____.

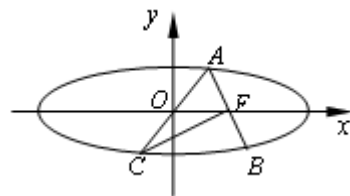


20. 如图, 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上有一个点 A , 它关于原点的对称点为 B , 点 F 为椭圆的右焦点, 且满足 $AF \perp BF$, 当 $\angle ABF = \frac{\pi}{12}$ 时, 椭圆的离心率为_____.



21. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 F , 双曲线 C 与过原点的直线相交于 A 、 B 两点, 连接 AF , BF . 若 $|AF| = 6$, $|BF| = 8$, $\cos \angle BAF = \frac{3}{5}$, 则该双曲线的离心率为_____.

22. 如图, 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 F , 过 F 的直线交椭圆于 A 、 B 两点, 点 C 是点 A 关于原点 O 的对称点, 若 $CF \perp AB$ 且 $CF = AB$, 则椭圆的离心率为_____.



23. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的右焦点为 F , 过点 F 向双曲线的一条渐进线引垂线, 垂足为 M , 交另一条渐近线于 N , 若 $2\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{FN}$, 则双曲线的离心率_____.

24. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上存在点 A , A 关于原点的对称点为 B , 点 F 为椭圆的右焦点, 且满足 $AF \perp BF$, 则该椭圆的离心率 e 的取值范围是_____.
25. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上一点 A 关于原点 O 的对称点为 B , F 为其右焦点, 若 $AF \perp BF$, 设 $\angle ABF = \alpha$, 且 $\alpha \in \left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}\right]$, 则椭圆离心率的取值范围是_____.
26. 已知左、右焦点分别为 F_1 、 F_2 的椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上存在 A 、 B 两点, 使得 $\overrightarrow{AF_1} = 4\overrightarrow{BF_2}$, 则该椭圆的离心率的取值范围是_____.
27. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 若椭圆上存在点 P , 使得 $\frac{|PF_1|}{|PF_2|} = e$, 则椭圆离心率的取值范围为_____.
28. 设椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个焦点为 $F(1,0)$, 点 $A(-1,1)$ 为椭圆 E 内一点, 若椭圆 E 上存在一点 P , 使得 $|PA| + |PF| = 7$, 则椭圆 E 的离心率的取值范围是_____.

一、填空题

29. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\log_2 x|, & x > 0 \\ -x^2 - 2x, & x \leq 0 \end{cases}$, 关于 x 的方程 $f(x) = m (m \in \mathbb{R})$ 有四个不同的实数解 x_1, x_2, x_3, x_4 则 $x_1 x_2 x_3 x_4$ 的取值范围为_____.

【答案】 $(0,1)$

【解析】解：作函数 $f(x) = \begin{cases} |\log_2 x|, & x > 0 \\ -x^2 - 2x, & x \leq 0 \end{cases}$ 的图象如

下，

结合图象可知， $-\log_2 x_3 = \log_2 x_4$ ，

故 $x_3 x_4 = 1$ ，

令 $-x^2 - 2x = 0$ 得， $x = 0$ 或 $x = -2$ ，

令 $-x^2 - 2x = 1$ 得， $x = -1$ ；

故 $x_1 x_2 \in (0,1)$ ，

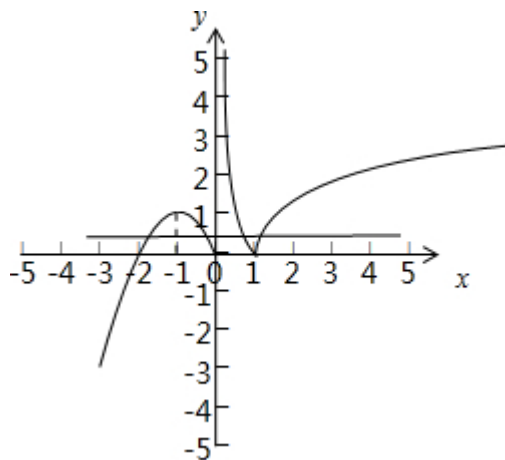
故 $x_1 x_2 x_3 x_4 \in (0,1)$ 。

故答案为： $(0,1)$ 。

作函数 $f(x) = \begin{cases} |\log_2 x|, & x > 0 \\ -x^2 - 2x, & x \leq 0 \end{cases}$ 的图象，从而可得

$x_3 x_4 = 1$ ，推出 $x_1 x_2$ 的范围即可求解结果。

本题考查了数形结合的思想应用及学生的作图能力，同时考查了配方法的应用。



30. 已知定义域为 $\mathbb{R}$ 的函数 $f(x)$ 满足：当 $x \in (-1,1]$ 时， $f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{x+1}, & -1 < x \leq 0 \\ 2^{2-x} - 2, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$ 且 $f(x+2) =$

$f(x)$ 对任意的 $x \in \mathbb{R}$ 恒成立. 若函数 $g(x) = f(x) - m(x+1)$ 在区间 $[-1,5]$ 内有 6 个零点，则实数 m 的取值范围是_____.

【答案】 $[\frac{2}{5}, \frac{22}{33})$

【解析】 【分析】

本题考查的知识点是分段函数的应用，函数的零点，数形结合思想，难度中档。

若函数 $g(x) = f(x) - m(x+1)$ 在区间 $[-1,5]$ 内有 6 个零点，则 $y = f(x)$ 与 $y = m(x+1)$ 的图象在区间 $[-1,5]$ 内有 6 个交点. 画出函数的图象，数形结合可得答案。

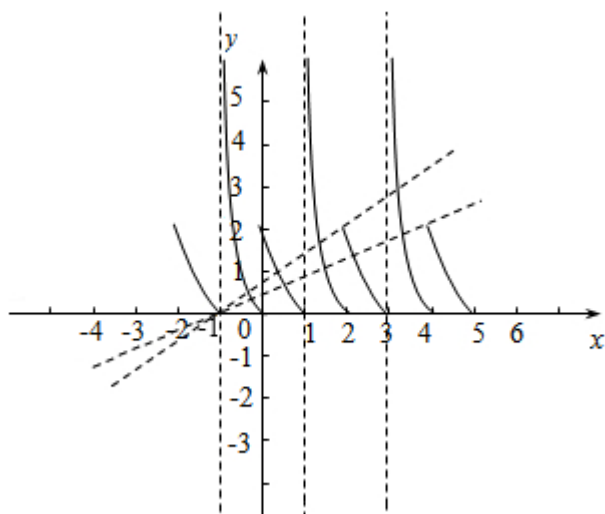
【解答】

解： $\because f(x+2) = f(x)$ 对 $\forall x \in \mathbb{R}$ 恒成立，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的周期为 2。

又 $\because$ 当 $x \in (-1,1]$ 时， $f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{x+1}, & -1 < x \leq 0 \\ 2^{2-x} - 2, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$ ，

∴函数 $f(x)$ 的图象如下图所示



令函数 $g(x) = f(x) - m(x + 1) = 0$,

则 $f(x) = m(x + 1)$,

若函数 $g(x) = f(x) - m(x + 1)$ 在区间 $[-1, 5]$ 内有 6 个零点,

则 $y = f(x)$ 与 $y = m(x + 1)$ 的图象在区间 $[-1, 5]$ 内有 6 个交点.

∵ $y = m(x + 1)$ 恒过点 $(-1, 0)$,

过 $(-1, 0)$, $(4, 2)$ 点的直线斜率为 $\frac{2}{5}$,

过 $(-1, 0)$, $(2, 2)$ 点的直线斜率为 $\frac{2}{3}$,

根据图象可得: $m \in [\frac{2}{5}, \frac{2}{3})$,

故答案为 $[\frac{2}{5}, \frac{2}{3})$.

31. 设函数 $f(x) = x^2 - x \ln x + 2$, 若存在区间 $[a, b] \subseteq [\frac{1}{2}, +\infty)$, 使 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的值域为 $[k(a + 2), k(b + 2)]$, 则 k 的取值范围为_____ .

【答案】 $(1, \frac{9+2\ln 2}{10})$

【解析】 解: $f'(x) = 2x - \ln x + 1$, $f''(x) = 2 - \frac{1}{x}$,

∴当 $x \geq \frac{1}{2}$ 时, $f''(x) \geq 0$,

∴ $f'(x)$ 在 $[\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递增,

∴ $f'(x) \geq f'(\frac{1}{2}) = 2 - \ln \frac{1}{2} > 0$,

∴ $f(x)$ 在 $[\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递增,

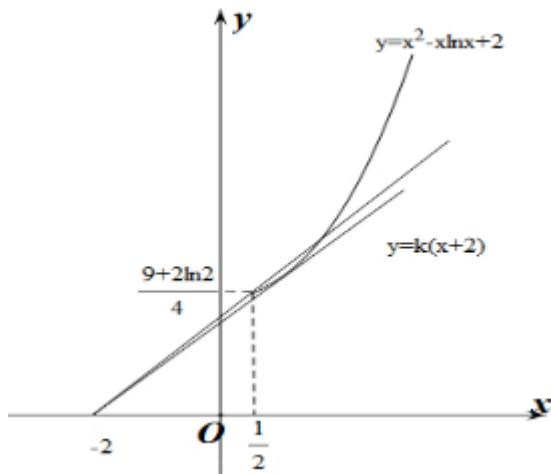
$$\because [a, b] \subseteq [\frac{1}{2}, +\infty),$$

$\therefore f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调递增,

$\therefore f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的值域为 $[k(a+2), k(b+2)]$,

$$\therefore \begin{cases} f(a)=k(a+2) \\ f(b)=k(b+2) \end{cases}, \therefore \text{方程 } f(x)=k(x+2) \text{ 在 } [\frac{1}{2}, +\infty) \text{ 上有两解 } a, b.$$

作出 $y=f(x)$ 与直线 $y=k(x+2)$ 的函数图象, 则两图象有两交点.



若直线 $y=k(x+2)$ 过点 $(\frac{1}{2}, \frac{9}{4} + \frac{1}{2}\ln 2)$, 则 $k = \frac{9+2\ln 2}{10}$,

若直线 $y=k(x+2)$ 与 $y=f(x)$ 的图象相切, 设切点为 (x_0, y_0) ,

$$\text{则 } \begin{cases} y_0 = k(x_0 + 2) \\ y_0 = x_0^2 - x_0 \ln x_0 + 2 \\ 2x_0 - \ln x_0 + 1 = k \end{cases}, \text{ 解得 } k = 1.$$

$$\therefore 1 < k < \frac{9+2\ln 2}{10}.$$

故答案为: $(1, \frac{9+2\ln 2}{10})$.

判断 $f(x)$ 的单调性得出 $f(x)=k(x+2)$ 在 $[\frac{1}{2}, +\infty)$ 上有两解, 作出函数图象, 利用导数的意义求出 k 的范围.

本题考查了函数的单调性, 导数的几何意义, 零点个数与函数图象的关系, 属于中档题.

32. 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是角 A, B, C 的对边, 且 $a+c=2b$, 则角 B 的取值范围为_____.

【答案】 $(0, \frac{\pi}{3}]$

【解析】解: $\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{a^2+c^2-(\frac{a+c}{2})^2}{2ac} = \frac{3a^2+3c^2-2ac}{8ac} \geq \frac{6ac-2ac}{8ac} = \frac{1}{2},$

当且仅当 $a=c=b$, 即 $\triangle ABC$ 为等边三角形时, $\cos B = \frac{1}{2}.$

又 $\because 0 < B < \pi, \therefore B \in (0, \frac{\pi}{3}].$

故答案为: $(0, \frac{\pi}{3}]$.

利用余弦定理、基本不等式的性质、三角函数的单调性即可得出.

本题考查了余弦定理、基本不等式的性质、三角函数的单调性, 考查了推理能力与计算能力, 属于中档题.

33. 已知在平面四边形 $ABCD$ 中, $AB = \sqrt{2}$, $BC = 2$, $AC \perp CD$, $AC = CD$, 则四边形 $ABCD$ 的面积的最大值为_____.

【答案】 $3 + \sqrt{10}$

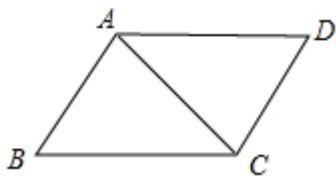
【解析】 【分析】

设 $\angle ABC = \theta$, $\theta \in (0, \pi)$, 由余弦定理求出 AC^2 , 再求四边形 $ABCD$ 的面积表达式, 利用三角恒等变换求出它的最大值.

本题考查了解三角形和三角恒等变换的应用问题, 是综合题.

【解答】

解: 如图所示,



设 $\angle ABC = \theta$, $\theta \in (0, \pi)$,

则在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理得,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\theta = 6 - 4\sqrt{2}\cos\theta,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 的面积为

$$S = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD}$$

$$= \frac{1}{2}(AB \cdot BC \cdot \sin\theta + AC \cdot CD),$$

化简得:

$$S = \frac{1}{2}(2\sqrt{2}\sin\theta + 6 - 4\sqrt{2}\cos\theta)$$

$$= 3 + \sqrt{2}(\sin\theta - 2\cos\theta)$$

$$= 3 + \sqrt{10}\sin(\theta - \varphi),$$

其中 $\tan\varphi = 2$,

当 $\sin(\theta - \varphi) = 1$ 时,

S 取得最大值为 $3 + \sqrt{10}$.

故答案为: $3 + \sqrt{10}$.

34. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A 、 B 、 C 的对边分别为 a 、 b 、 c , 若 $c \cdot \cos B = a + \frac{1}{2}b$, $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{\sqrt{3}}{12}c$,

则边 c 的最小值为_____.

【答案】 1

【解析】解：在 $\triangle ABC$ 中，由条件里用正弦定理可得 $\sin C \cos B = \sin A + \frac{1}{2} \sin B = \sin(B+C) + \frac{1}{2} \sin B$ ，

$$\text{即 } 2\sin C \cos B = 2\sin B \cos C + 2\sin C \cos B + \sin B,$$

$$\therefore 2\sin B \cos C + \sin B = 0,$$

$$\therefore \cos C = -\frac{1}{2}, \quad C = \frac{2\pi}{3}.$$

$$\text{由于 } \triangle ABC \text{ 的面积为 } S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin C = \frac{\sqrt{3}}{4}ab = \frac{\sqrt{3}}{12}c,$$

$$\therefore c = 3ab.$$

$$\text{再由余弦定理可得 } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C, \text{ 整理可得: } 9a^2b^2 = a^2 + b^2 + ab \geq 3ab,$$

当且仅当 $a = b$ 时，取等号，

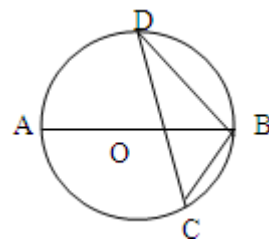
$$\therefore ab \geq \frac{1}{3}, \text{ 可得: } c = 3ab \geq 1, \text{ 即边 } c \text{ 的最小值为 } 1.$$

故答案为：1.

由条件里用正弦定理、两角和的正弦公式求得 $\cos C$ ，进而可求 C ，根据 $\triangle ABC$ 的面积公式和已知，求得 $c = 3ab$ 。再由余弦定理化简可得 $9a^2b^2 = a^2 + b^2 + ab \geq 3ab$ ，由此求得 c 的最小值。

本题主要考查正弦定理和余弦定理的应用，诱导公式、两角和的正弦公式、基本不等式的应用，属于基础题。

35. 如图， AB 是圆 O 的直径， C 、 D 是圆 O 上的点， $\angle CBA = 60^\circ$ ， $\angle ABD = 45^\circ$ ， $\overrightarrow{CD} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{BC}$ ，则 $x + y =$ _____.



【答案】 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】解：如图过 C 作 $CE \perp OB$ 于 E ，因为 AB 是圆 O 的直径， C 、 D 是圆 O 上的点， $\angle CBA = 60^\circ$ 所以 E 为 OB 的中点，连结 OD ，则 $\overrightarrow{CE} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{OD}$ ，

$$\therefore \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{BC} + \frac{2}{\sqrt{3}}\overrightarrow{CE}, \quad \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE} = -\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$$

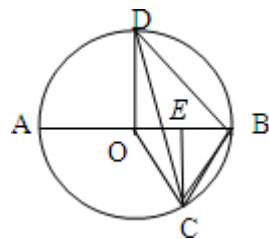
$$= \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{BC} + \frac{2}{\sqrt{3}}(-\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OA})$$

$$= (\frac{1}{\sqrt{3}} + 1)\overrightarrow{OA} - (1 + \frac{2}{\sqrt{3}})\overrightarrow{BC}$$

$$\text{又 } \overrightarrow{CD} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{BC},$$

$$x + y = (\frac{1}{\sqrt{3}} + 1) - (1 + \frac{2}{\sqrt{3}}) = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{故答案为: } -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$



通过过 C 作 $CE \perp OB$ 于 E ，用向量 $\overrightarrow{CE} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{OD}$ ，求出 $\overrightarrow{CD}$ 与 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{BC}$ 的关系，结合 $\overrightarrow{CD} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{BC}$ ，

曲线 $x+y$ 的值即可.

本题考查向量在几何中的应用, 利用已知向量表示所求向量是解题的难点, 考查分析问题解决问题的能力.

36. 设 $\vec{a} = (\sin x, \sin x)$, $\vec{b} = (-\sin x, m+1)$, 若 $\vec{a} \cdot \vec{b} = m$ 在区间 $(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$ 上有三个根, 则 m 的范围为

_____.

【答案】 $(\frac{1}{2}, 1)$

【解析】解: $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\sin^2 x + (m+1)\sin x = m$,

设 $f(x) = \vec{a} \cdot \vec{b} - m = -\sin^2 x + (m+1)\sin x - m = (1 - \sin x)(\sin x - m) = 0$,

解得 $\sin x = 1$ 或 $\sin x = m$.

当 $\sin x = 1$ 时, $x = \frac{\pi}{2}$, 只有一个解.

当 $\sin x = m$ 时, 有两个解, 此时 $\frac{1}{2} < m < 1$,

故 m 的范围是 $(\frac{1}{2}, 1)$

本题先对向量进行了数量积的运算, 再对关于 $\sin x$ 的二次函数进行了因式分解, 再讨论根的个数. 本题考查了方程根的个数问题, 运用了分类讨论的思想.

37. 已知 $\vec{a} = (1, 3)$, $\vec{b} = (2 + \lambda, 1)$, 且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 成锐角, 则实数 λ 的取值范围是_____.

【答案】 $\{\lambda | \lambda > -5, \text{ 且 } \lambda \neq -\frac{5}{3}\}$

【解析】解: 由题意可得 $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$, 且 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 不共线, $\therefore \begin{cases} 2 + \lambda + 3 > 0 \\ \frac{2+\lambda}{1} \neq \frac{1}{3} \end{cases}$, 求得 $\lambda > -5$, 且 $\lambda \neq -\frac{5}{3}$,

故答案为: $\{\lambda | \lambda > -5, \text{ 且 } \lambda \neq -\frac{5}{3}\}$.

由题意可得 $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$, 且 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 不共线, 由 $\begin{cases} 2 + \lambda + 3 > 0 \\ \frac{2+\lambda}{1} \neq \frac{1}{3} \end{cases}$, 求得 λ 的范围.

本题主要考查用两个向量的数量积表示两个向量的夹角, 两个向量共线的性质, 两个向量坐标形式的运算, 属于基础题.

38. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB \perp AC$, $AB = \frac{1}{t}$, $AC = t$, P 是 $\triangle ABC$ 所在平面内一点, 若 $\overrightarrow{AP} = \frac{4\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$, 则

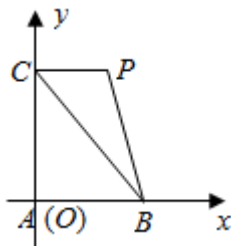
$\triangle PBC$ 面积的最小值为_____.

【答案】 $\frac{3}{2}$

【解析】解: 由题意建立如图所示的坐标系,

可得 $A(0,0)$, $B(\frac{1}{t}, 0)$, $C(0, t)$,

$\therefore \overrightarrow{AP} = \frac{4\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} = (4, 0) + (0, 1) = (4, 1)$,



$\therefore P(4,1)$;

又 $|BC| = \sqrt{t^2 + (\frac{1}{t})^2}$, BC 的方程为 $tx + \frac{y}{t} = 1$,

$\therefore$ 点 P 到直线 BC 的距离为 $d = \frac{|4t + \frac{1}{t} - 1|}{\sqrt{t^2 + (\frac{1}{t})^2}}$,

$\therefore \triangle PBC$ 的面积为

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot d \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{t^2 + (\frac{1}{t})^2} \cdot \frac{|4t + \frac{1}{t} - 1|}{\sqrt{t^2 + (\frac{1}{t})^2}} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} |4t + \frac{1}{t} - 1| \geq \frac{1}{2} \cdot |2\sqrt{4t \cdot \frac{1}{t}} - 1| = \frac{3}{2},$$

当且仅当 $4t = \frac{1}{t}$, 即 $t = \frac{1}{2}$ 时取等号,

$\therefore \triangle PBC$ 面积的最小值为 $\frac{3}{2}$.

故答案为: $\frac{3}{2}$.

建立直角坐标系, 由向量的坐标运算得出 P 的坐标,

利用基本不等式求得 $\triangle PBC$ 面积的最小值.

本题考查了平面向量数量积的运算以及函数的最值和基本不等式的运用问题, 是中档题.

39. 若直线 $l: x = my + \sqrt{2}$ 与曲线 $C: y = \sqrt{1 - x^2}$ 相交于 A, B 两点, O 为坐标原点, 当 $\triangle AOB$ 的面积取最大值时, 实数 m 的取值_____.

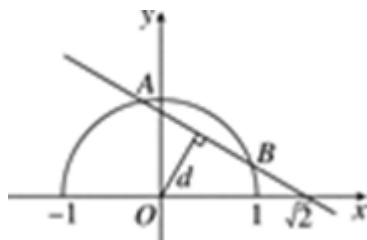
【答案】 $-\sqrt{3}$

【解析】 【分析】

本题考查直线与圆的位置关系及利用基本不等式求最值, 将 $\triangle AOB$ 的面积用圆心到直线的距离表示, 然后利用基本不等式即可求解.

【解答】

解: 曲线 $y = \sqrt{1 - x^2}$ 表示圆心在原点, 半径为 1 的圆的上半圆, 图象如图所示.



若直线 l 与曲线相交于 A, B 两点, 则直线 l 的斜率 $m < 0$,

则点 O 到 l 的距离 $d = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+m^2}}$,

$$\text{又 } S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} |AB| \cdot d = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{1-d^2} \cdot d \leq \frac{1-d^2+d^2}{2} = \frac{1}{2},$$

当且仅当 $1-d^2 = d^2$, 即 $d^2 = \frac{1}{2}$ 时, $S_{\triangle AOB}$ 取得最大值.

$$\text{所以 } d^2 = \frac{2}{1+m^2} = \frac{1}{2},$$

解得 $m = -\sqrt{3}$ ($m = \sqrt{3}$ 舍去).

故答案为 $-\sqrt{3}$.

40. 若正数 a, b 满足 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$, 则 $\frac{1}{a-1} + \frac{4}{b-1}$ 的最小值为_____.

【答案】4

【解析】解: $\because$ 正数 a, b 满足 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$, $\therefore b = \frac{a}{a-1} > 0$, 解得 $a > 1$, 同理 $b > 1$,

则 $\frac{1}{a-1} + \frac{4}{b-1} = \frac{1}{a-1} + \frac{4}{\frac{a}{a-1}-1} = \frac{1}{a-1} + 4(a-1) \geq 2\sqrt{\frac{1}{a-1} \cdot 4(a-1)} = 4$, 当且仅当 $a = \frac{3}{2}$ 时取等号(此时 $b = 3$).

$\therefore \frac{1}{a-1} + \frac{4}{b-1}$ 的最小值为 4.

故答案为: 4.

由 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ 得到 $b = \frac{a}{a-1} > 0$, 代入代数式变形利用基本不等式即可得出.

本题考查了基本不等式的性质, 属于基础题.

41. 已知函数 $f(x) = x^2 + 2\sqrt{a}x - b + 1$ (a, b 为正实数) 只有一个零点, 则 $\frac{1}{a} + \frac{2a}{b+1}$ 的最小值为_____.

【答案】 $\frac{5}{2}$

【解析】解: $\because$ 函数 $f(x) = x^2 + 2\sqrt{a}x - b + 1$ (a, b 为正实数) 只有一个零点,

$$\therefore \Delta = 4a - 4(-b+1) = 0, \therefore a + b = 1,$$

$\because a, b$ 为正实数,

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{2a}{b+1} = \frac{1}{a} + \frac{4}{b+1} - 2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{4}{b+1} \right) (a+b+1) - 2$$

$$= \frac{1}{2}(1 + 4 + \frac{b+1}{a} + \frac{4a}{b+1}) - 2 \geq \frac{1}{2}(5 + 2\sqrt{\frac{b+1}{a} \cdot \frac{4a}{b+1}}) - 2 = \frac{5}{2},$$

当且仅当 $b+1=2a$, $a+b=1$, 即 $a=\frac{2}{3}$, $b=\frac{1}{3}$ 时取等号,

$\therefore \frac{1}{a} + \frac{2a}{b+1}$ 的最小值为: $\frac{5}{2}$.

故答案为: $\frac{5}{2}$.

由题意可得 $a+b=1$, 化简所求表达式, 由基本不等式可得结果.

本题考查基本不等式, 得出 $a+b=1$ 是解决问题的关键, 属基础题.

42. 过点 $P(-1,1)$ 作圆 $C: (x-t)^2 + (y-t+2)^2 = 1 (t \in R)$ 的切线, 切点分别为 A, B , 则 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 的最小值为_____.

【答案】 $\frac{21}{4}$

【解析】解: 圆 $C: (x-t)^2 + (y-t+2)^2 = 1$ 的圆心坐标为 $(t, t-2)$, 半径为 1,

$$\therefore |PC|^2 = (t+1)^2 + (t-3)^2 = 2t^2 - 4t + 10,$$

$$\therefore |PA|^2 = |PB|^2 = |PC|^2 - 1 = (t+1)^2 + (t-3)^2 - 1 = 2t^2 - 4t + 9, \quad \cos \angle APC = \frac{|AP|}{|PC|} =$$

$$\frac{\sqrt{2t^2-4t+9}}{\sqrt{2t^2-4t+10}},$$

$$\therefore \cos \angle PAB = 2\cos^2 \angle APC - 1 = 2 \times \left(\frac{\sqrt{2t^2-4t+9}}{\sqrt{2t^2-4t+10}} \right)^2 - 1 = \frac{2t^2-4t+8}{2t^2-4t+10} = \frac{t^2-2t+4}{t^2-4t+5},$$

$$\therefore \vec{PA} \cdot \vec{PB} = |\vec{PA}| \cdot |\vec{PB}| \cos \angle PAB = (2t^2 - 4t + 9) \cdot \frac{t^2-2t+4}{t^2-4t+5} = [(t^2 - 2t + 5) + (t^2 - 2t + 4)] \cdot$$

$$\frac{t^2-2t+4}{t^2-4t+5},$$

设 $t^2 - 2t + 4 = x$, 则 $x \geq 3$,

$$\text{则 } \vec{PA} \cdot \vec{PB} = |\vec{PA}| \cdot |\vec{PB}| = f(x) = (x + x + 1) \cdot \frac{x}{x+1} = \frac{2x^2+x}{x+1},$$

$\therefore f'(x) > 0$ 恒成立,

$\therefore f(x)$ 在 $[3, +\infty)$ 单调递增,

$$\therefore f(x)_{\min} = f(3) = \frac{21}{4},$$

$\therefore \vec{PA} \cdot \vec{PB} = |\vec{PA}| \cdot |\vec{PB}|$ 的最小值为 $\frac{21}{4}$.

根据直线与圆相切的性质可求 $PA = PB$, 及 $\angle APB$, 然后代入向量数量积的定义可求 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 的最小值.

本题主要考查了圆的切线性质的应用及平面向量的数量积的定义的应用, 属于中档题.

43. 一束光线从点 $A(-1,1)$ 出发, 经 x 轴反射到圆 $C: (x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$ 上的最短路径的长度是_____.

【答案】4

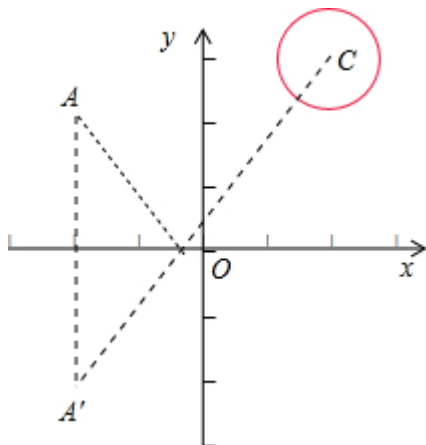
【解析】解：由题意可得圆心 $C(2,3)$ ，半径为 $r=1$ ，点 A 关于 x 轴的对称点 $A'(-1,-1)$ ，

求得 $A'C = \sqrt{(2+1)^2 + (3+1)^2} = 5$ ，则要求的最短路径的长为 $A'C - r = 5 - 1 = 4$ ，

故答案为：4.

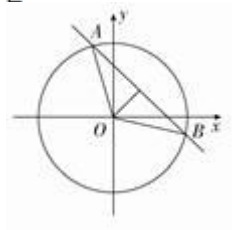
求出点 A 关于 x 轴的对称点 A' ，则要求的最短路径的长为 $A'C - r$ (圆的半径)，计算求得结果.

本题主要考查反射定理的应用，求一个点关于直线的对称点的方法，体现了转化、数形结合的数学思想，属于基础题.



44. 如下图，直线 $x+y-k=0(k>0)$ 与圆 $O:x^2+y^2=4$ 交

于不同的两点 A 、 B ，点 O 是坐标原点，且有 $|\vec{OA} + \vec{OB}| \geq \frac{\sqrt{3}}{3} |\vec{AB}|$ ，则实数 k 的取值范围是_____.



【答案】 $[\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$

【解析】 【分析】

本题考查直线与圆的位置关系；根据直线与圆相交，得到圆心到直线的距离小于半径，以及平面向量的加法运算和模长关系得到 k 的不等式解之.

【解答】

解：∵直线 $x+y-k=0(k>0)$ 与圆 $O:x^2+y^2=4$ 交于不同的两点 A 、 B ，点 O 是坐标原点，

$$\therefore \frac{|k|}{\sqrt{2}} < 2 \quad ①$$

且有 $|\vec{OA} + \vec{OB}| \geq \frac{\sqrt{3}}{3} |\vec{AB}|$,

$$\therefore \frac{2|k|}{\sqrt{2}} \geq \frac{\sqrt{3}}{3} \times 2 \sqrt{4 - \left(\frac{k}{\sqrt{2}}\right)^2} \quad ②$$

由①②可得 $\sqrt{2} \leq k < 2\sqrt{2}$,

则实数 k 的取值范围是 $[\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$.

故答案为 $[\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$.

45. 由直线 $y=x+1$ 上的任意一点向圆 $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 2$ 引切线，则切线长的最小值为_____；

【答案】4

【解析】 【分析】

本题主要考查了直线与圆的位置关系的应用，属于中等题.根据题意和圆与直线的位置关系得到切线长和半径之间的关系式求解即可.

【解答】

解：设 A 为直线 $y = x + 1$ 上任一点，圆心为 C ，切点为 B ，

易得直线和圆 C 相离，

$$\text{切线长 } |AB| = \sqrt{|AC|^2 - r^2} = \sqrt{|AC|^2 - 2},$$

所以切线长最小时，即 $|AC|$ 最小，

即直线上的点与圆心之间的距离最小，

所以 $|AC|$ 的最小值为圆心到直线的距离，

易得 $C(3, -2)$ ，

$$\text{所以 } |AC| \text{ 的最小值为 } \frac{|3+2+1|}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2},$$

$$\text{所以 } |AB| \text{ 的最小值为 } \sqrt{(3\sqrt{2})^2 - 2} = 4,$$

故答案为 4.

46. 已知圆 $C: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 1$ 和两点 $A(-m, 0)$, $B(m, 0)$ ($m > 0$)，若圆 C 上存在点 P 使得 $\angle APB = 90^\circ$ ，则 m 的最大值为_____.

【答案】6

【解析】 【分析】

本题考查了平面向量的应用问题，也考查了直线与圆的应用问题，是综合性题目.
关键是理解与圆有关的最值的应用.

【解答】

$$\text{解：圆 } C: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 1,$$

$$\therefore \text{圆心 } C(3, 4), \text{ 半径 } r = 1,$$

$$\text{设点 } P(a, b) \text{ 在圆 } C \text{ 上, 则 } \vec{AP} = (a, b+m), \vec{BP} = (a, b-m),$$

$$\because \angle APB = 90^\circ,$$

$$\text{所以 } \vec{AP} \cdot \vec{BP} = 0,$$

$$\therefore a^2 + (b+m)(b-m) = 0,$$

$$\text{即 } m^2 = a^2 + b^2,$$

$$\text{所以 } m = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$\therefore m \text{ 的最大值是 } |OC| + r = 5 + 1 = 6,$$

故答案为 6.

47. (1) 已知 x, y 满足 $\begin{cases} x - 2y \geq -4, \\ 2x + y \geq 2, \\ 3x - y \leq 3, \end{cases}$ 则 $z = 2x - y$ 的最大值为_____.

(2) 在 $(ax^2 - \frac{2}{x})^5$ 的展开式中, x^4 的系数为 5, 则实数 a 的值为_____.

(3) 已知直线 $l: kx - y - k + 2 = 0$ 与圆 $C: x^2 + y^2 - 2y - 7 = 0$ 相交于 A, B 两点, 则 $|AB|$ 的最小值为_____.

(4) $\triangle ABC$ 的垂心 H 在其内部, $\angle A = 30^\circ$, $AH = \sqrt{3}$, 则 $\sqrt{3}BH + CH$ 的取值范围是_____.

【答案】(1)2

$$(2) \frac{1}{2}$$

$$(3) 2\sqrt{6}$$

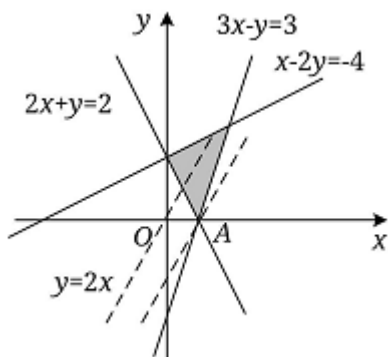
$$(4) (1, \sqrt{3})$$

【解析】(1) 【分析】

此题重点考查了线性规划的知识, 是一个基础题, 难度不大.

【解答】

解: 作出约束条件的解析式如图所示:



易知 $z = 2x - y$ 过点 $A(1, 0)$ 时, z 取最大值为 2,

故答案为 2;

(2) 【分析】

本题考查了二项式展开式的通项公式的应用问题，是基础题.

利用通项公式写出展开式的第三项，求出系数即可.

【解答】

解：∵二项式 $\left(ax^2 - \frac{2}{x}\right)^5$ 展开式中， x^4 的系数为5，

$$\text{由 } C_5^2 (ax^2)^3 \left(-\frac{2}{x}\right)^2 = 40a^3 x^4,$$

$$\therefore 40a^3 = 5,$$

$$\text{解得 } a = \frac{1}{2},$$

故答案为 $\frac{1}{2}$;

(3) 【分析】

本题主要考查直线和圆的位置关系，点到直线的距离公式，弦长公式的应用，属于中档题.

写出圆的标准方程，求出弦心距，再利用弦长公式求得弦长.

【解答】

解：由题意知直线恒过点(1,2)，圆的标准方程为 $x^2 + (y-1)^2 = 8$ ，

$$\text{易知 } |AB| \text{ 的最小值为 } |AB| = 2\sqrt{(2\sqrt{2})^2 - \left(\sqrt{(1-0)^2 + (2-1)^2}\right)^2} = 2\sqrt{6},$$

故答案为 $2\sqrt{6}$;

(4) 【分析】

【解答】

解：因为 $\angle A = 30^\circ$, $AH = \sqrt{3}$,

所以 $AH = 2R\cos A$ ，可得 $R = 1$,

$$\angle B + \angle C = 150^\circ,$$

因为 $\triangle ABC$ 的垂心 H 在其内部，

所以三角形为锐角三角形，

$$\text{所以 } \sqrt{3}BH + CH = 2\sqrt{3}\cos B + 2\cos C$$

$$= 2\sqrt{3}\cos(150^\circ - C) + 2\cos C$$

$$= \sqrt{3}\sin C - \cos C$$

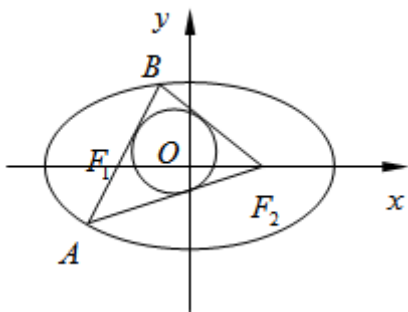
$$= 2\sin(C - 30^\circ),$$

所以 $\sqrt{3}BH + CH$ 的取值范围为 $(1, \sqrt{3})$,

故答案为 $(1, \sqrt{3})$.

48. 如图，设椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 ，过焦点 F_1 的直线交椭圆于 A, B 两点，若 $\triangle ABF_2$

的内切圆的面积为 π ，设 A, B 两点的坐标分别为 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ，则 $|y_1 - y_2|$ 值为_____.



【答案】 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

【解析】解：∵椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ 中， $a^2 = 16$ 且 $b^2 = 4$ ，

∴ $a = 4$ ， $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 2\sqrt{3}$ ，可得椭圆的焦点分别为 $F_1(-2\sqrt{3}, 0)$ 、 $F_2(2\sqrt{3}, 0)$ ，

设 $\triangle ABF_2$ 的内切圆半径为 r ，

∵ $\triangle ABF_2$ 的内切圆面积为 $S = \pi r^2 = \pi$ ，∴ $r = 1$ ，

根据椭圆的定义，得 $|AB| + |AF_2| + |BF_2| = (|AF_1| + |AF_2|) + (|BF_1| + |BF_2|) = 4a = 16$ 。

∴ $\triangle ABF_2$ 的面积 $S = \frac{1}{2}(|AB| + |AF_2| + |BF_2|) \times r = \frac{1}{2} \times 16 \times 1 = 8$

又∵ $\triangle ABF_2$ 的面积 $S = S_{\triangle AF_1F_2} + S_{\triangle BF_1F_2} = \frac{1}{2} \times |y_1| \times |F_1F_2| + \frac{1}{2} \times |y_2| \times |F_1F_2|$

$= \frac{1}{2} \times (|y_1| + |y_2|) \times |F_1F_2| = 2\sqrt{3}|y_2 - y_1|$ (A 、 B 在 x 轴的两侧)

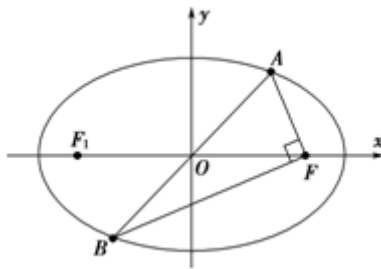
∴ $2\sqrt{3}|y_2 - y_1| = 8$ ，解之得 $|y_2 - y_1| = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ 。

故答案为： $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

根据椭圆方程求得 a 、 c 的值，从而得到椭圆的焦点坐标.利用椭圆的定义算出 $\triangle ABF_2$ 的周长为 16，由圆面积公式求得 $\triangle ABF_2$ 的内切圆半径 $r = 1$ ，从而算出 $\triangle ABF_2$ 的面积为 8.最后根据 $\triangle ABF_2$ 的形状，算出其面积 $S = S_{\triangle AF_1F_2} + S_{\triangle BF_1F_2} = 2\sqrt{3}|y_2 - y_1|$ ，由此建立关系式并解之，即可得出 $|y_2 - y_1|$ 的值. 本题给出椭圆经过左焦点 F_1 的弦 AB ，在已知 $\triangle ABF_2$ 的内切圆的面积情况下，求 A 、 B 两点的纵坐标之差.着重考查了椭圆的定义、三角形内切圆的性质和三角形的面积公式等知识，属于中档题.

49. 如图，已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上有一个点 A ，它关于原点的对称点为 B ，点 F 为椭圆

的右焦点，且满足 $AF \perp BF$ ，当 $\angle ABF = \frac{\pi}{12}$ 时，椭圆的离心率为_____。



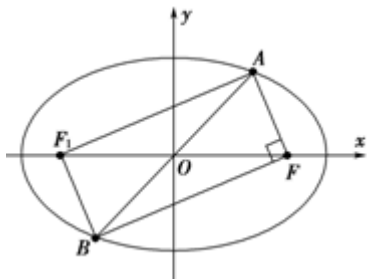
【答案】 $\frac{\sqrt{6}}{3}$

【解析】解：设椭圆的左焦点为 F_1 ，连结 AF_1 ， BF_1 ，由对称性及 $AF \perp BF$ 可知，四边形 $AFBF_1$ 是矩形，所以 $|AB| = |F_1F| = 2c$ ，所以在 $Rt \triangle ABF$ 中， $|AF| = 2c \sin \frac{\pi}{12}$ ，

$|BF| = 2c \cos \frac{\pi}{12}$ ，由椭圆定义得：

$$2c(\cos \frac{\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12}) = 2a, \text{ 即:}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12}} = \frac{1}{\sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12})} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$



故答案为： $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

设椭圆的左焦点为 F_1 ，连结 AF_1 ， BF_1 ，通过 $|AB| = |F_1F| = 2c$ ，所以在 $Rt \triangle ABF$ 中， $|AF| = 2c \sin \frac{\pi}{12}$ ，

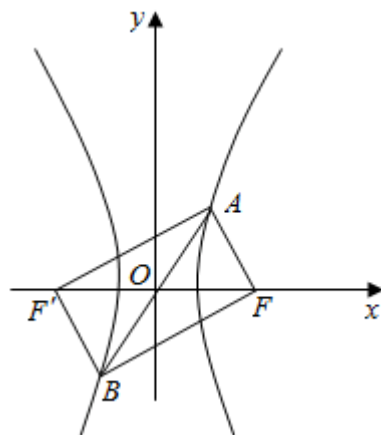
$|BF| = 2c \cos \frac{\pi}{12}$ ，由椭圆定义，转化求解离心率即可.

本题考查椭圆的简单性质的应用，考查计算能力.

50. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 F ，双曲线 C 与过原点的直线相交于 A 、 B 两点，连接 AF ， BF . 若 $|AF| = 6$ ， $|BF| = 8$ ， $\cos \angle BAF = \frac{3}{5}$ ，则该双曲线的离心率为_____.

【答案】 5

【解析】解：在 $\triangle AFB$ 中，由余弦定理可得
 $|BF|^2 = |AB|^2 + |AF|^2 - 2|AB| \cdot |AF| \cos \angle BAF$,



即有 $64 = |AB|^2 + 36 - 12|AB|$.

化为 $|AB|^2 - \frac{36}{5}|AB| - 28 = 0$,

解得 $|AB| = 10$.

由勾股定理的逆定理, 可得 $\angle ABF = 90^\circ$,

设 F' 为双曲线的右焦点, 连接 BF' , AF' .

根据对称性可得四边形 $AFBF'$ 是矩形.

结合矩形性质可知, $2c = 10$, 利用双曲线定义, $2a = 8 - 6 = 2$,

所以离心率 $e = \frac{c}{a} = 5$.

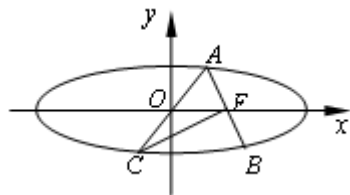
故答案为: 5.

在 $\triangle AFB$ 中, 由余弦定理可得 $|BF|^2 = |AB|^2 + |AF|^2 - 2|AB| \cdot |AF| \cos \angle BAF$, 即可得到 $|AB|$, 由勾股定理的逆定理, 可得 $\angle ABF = 90^\circ$, 设 F' 为双曲线的右焦点, 连接 BF' , AF' . 根据对称性可得四边形 $AFBF'$ 是矩形. 即可得到 a , c , 进而求得离心率.

熟练掌握余弦定理、双曲线的定义、对称性、离心率、矩形的性质等基础知识是解题的关键, 考查运算能力, 属于中档题.

51. 如图, 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 F , 过 F 的直线

交椭圆于 A, B 两点, 点 C 是点 A 关于原点 O 的对称点, 若 $CF \perp AB$ 且 $CF = AB$, 则椭圆的离心率为_____.



【答案】 $\sqrt{6} - \sqrt{3}$

【解析】解: 作另一焦点 F' , 连接 AF' 和 BF' 和 CF' , 则四边形 $FAF'C$ 为平行四边形,

$\therefore AF' = CF = AB$, 且 $AF' \perp AB$, 则三角形 ABF' 为等腰直角三角形,

设 $AF' = AB = x$, 则 $x + x + \sqrt{2}x = 4a$, 即 $x = (4 - 2\sqrt{2})a$,

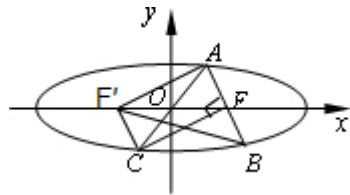
$\therefore AF = (2\sqrt{2} - 2)a$, 在三角形 AFF' 中由勾股定理得 $(AF')^2 + (AF)^2 = (2c)^2$,

$\therefore e^2 = 9 - 6\sqrt{2}$. 则 $e = \sqrt{6} - \sqrt{3}$.

故答案为: $\sqrt{6} - \sqrt{3}$.

作另一焦点 F' , 连接 AF' 和 BF' 和 CF' , 则四边形 $FAF'C$ 为平行四边形, 进一步得到三角形 ABF' 为等腰直角三角形, 设 $AF' = AB = x$, 求出 x , 在三角形 AFF' 中由勾股定理得 $(AF')^2 + (AF)^2 = (2c)^2$, 即可求出 e^2 , 则答案可求.

本题考查了椭圆的简单性质, 考查了勾股定理在解题中的应用, 是中档题.



52. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的右焦点为 F , 过点 F 向双曲线的一条渐进线引垂线, 垂足为 M ,

交另一条渐近线于 N , 若 $2\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{FN}$, 则双曲线的离心率_____.

【答案】 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【解析】解：双曲线的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$,

设 M 在直线 $y = \frac{b}{a}x$ 上, $M(x_0, \frac{b}{a}x_0)$, $F(c, 0)$,

$$\text{则 } MF = \frac{bc}{\sqrt{a^2+b^2}} = b, \quad OM = \sqrt{OF^2 - MF^2} =$$

$$\sqrt{c^2 - b^2} = a,$$

$$\because 2\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{FN}, \therefore FN = 2b,$$

$$\therefore S_{\triangle OFN} = 2S_{\triangle OMF},$$

$$\text{即 } \frac{1}{2} \times c \times ON \times \sin \angle NOF = 2 \times \frac{1}{2} \times ac \times$$

$$\sin \angle MOF$$

$$\because \angle MOF = \angle NOF,$$

$$\therefore ON = 2a,$$

在 $Rt \triangle OMN$ 中, 由勾股定理得 $a^2 + 9b^2 = 4a^2$,

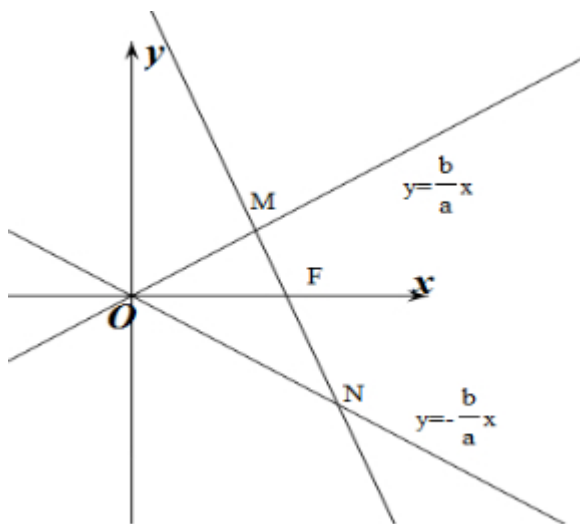
$$\therefore b^2 = \frac{a^2}{3},$$

$$\therefore e = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

故答案为: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

由题意可知 F 为 MN 的三等分点, 用 a, b, c 表示出 $\triangle OMN$ 的边长, 利用勾股定理得出 a, b 的关系从而得出离心率.

本题考查了双曲线的简单性质, 属于中档题.



53. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上存在点 A , A 关于原点的对称点为 B , 点 F 为椭圆的右焦点, 且满足 $AF \perp BF$, 则该椭圆的离心率 e 的取值范围是_____.

【答案】 $[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$

【解析】 【分析】

本题考查椭圆的定义及简单几何性质, 同时考查正弦函数的性质与辅助角公式,

首先利用已知条件设出椭圆的左焦点的坐标, 进一步根据垂直的条件得到矩形, 所以 $|AB| = |NF|$,

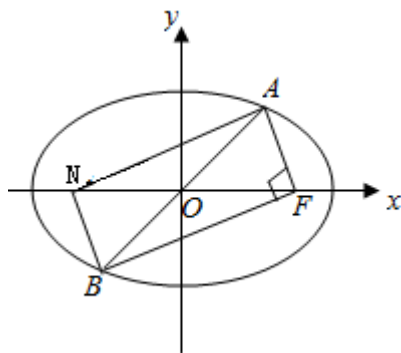
再根据椭圆的定义: $|AF| + |AN| = 2a$, 设 $\angle ABF = \alpha$, 由离心率公式 $e = \frac{2c}{2a} = \frac{1}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{1}{\sqrt{2} \sin(\alpha + \frac{\pi}{4})}$,

由 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, 进一步求出结论.

【解答】

解: 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上一点 A 关于原点的对称点为点 B ,

F 为其右焦点, 设左焦点为 N ,



连接 AF , AN , BF , BN ,

所以四边形 $AFNB$ 为矩形,

根据椭圆的定义得 $|AF| + |AN| = |BF| + |BN| = 2a$,

设 $\angle ABF = \alpha$, 则 $2a = 2c\cos\alpha + 2c\sin\alpha$,

$$\text{利用 } e = \frac{2c}{2a} = \frac{1}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}\sin(\alpha + \frac{\pi}{4})},$$

$$\text{由 } \alpha \in (0, \frac{\pi}{2}), \text{ 得 } \frac{\pi}{4} < \alpha + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4},$$

$$\text{所以 } \frac{\sqrt{2}}{2} < \sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) \leq 1,$$

$$\text{则 } \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{2}\sin(\alpha + \frac{\pi}{4})} < 1,$$

所以椭圆离心率 e 的取值范围为 $[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$.

故答案为 $[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$.

54. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上一点 A 关于原点 O 的对称点为 B , F 为其右焦点, 若 $AF \perp BF$,

设 $\angle ABF = \alpha$, 且 $\alpha \in [\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}]$, 则椭圆离心率的取值范围是_____.

【答案】 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{3}]$

【解析】 【分析】

本题考查椭圆的定义, 三角函数关系式的恒等变换, 利用定义域求三角函数的值域, 离心率公式的应用, 属于中档题型. 首先利用已知条件设出椭圆的左焦点的坐标, 进一步根据垂直的条件得到长方形,

所以 $AB = NF$, 再根据椭圆的定义: $|AF| + |AN| = 2a$, 由离心率公式 $e = \frac{2c}{2a} = \frac{1}{\sin\alpha + \cos\alpha} =$

$\frac{1}{\sqrt{2}\sin(\alpha + \frac{\pi}{4})}$, 由 $\alpha \in [\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}]$ 的范围, 进一步求出结论.

【解答】

解：已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上一点 A 关于原点的对称点为点 B ,

F 为其右焦点，设左焦点为 N ，连接 AF , AN , BF , BN ,

所以四边形 $AFNB$ 为长方形. 根据椭圆的定义得 $|AF| + |AN| = 2a$,

$\angle ABF = \alpha$, 则 $\angle ANF = \alpha$. 所以 $2a = 2c \cos \alpha + 2c \sin \alpha$,

$$\text{利用 } e = \frac{2c}{2a} = \frac{1}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{1}{\sqrt{2} \sin(\alpha + \frac{\pi}{4})},$$

$$\text{由 } \alpha \in [\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}] \text{ 得 } \frac{\pi}{3} \leq \alpha + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2},$$

$$\text{则 } \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{1}{\sqrt{2} \sin(\alpha + \frac{\pi}{4})} \leq \frac{\sqrt{6}}{3},$$

所以椭圆离心率 e 的取值范围为 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{3}]$.

故答案为 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{3}]$.

55. 已知左、右焦点分别为 F_1 、 F_2 的椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上存在 A 、 B 两点，使得 $\overrightarrow{AF_1} = 4\overrightarrow{BF_2}$ ，则该椭圆的离心率的取值范围是_____.

【答案】 $(\frac{3}{5}, 1)$

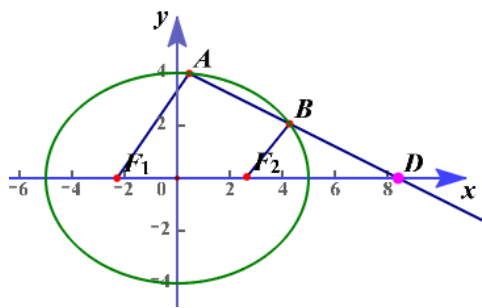
【解析】 【分析】

本题考查了椭圆的几何性质以及向量的共线理论，属于中档题.

数形集合，找到 AB 延长线与 x 轴的交点，与右顶点比较，为本题关键.

【解答】

解：使得 $\overrightarrow{AF_1} = 4\overrightarrow{BF_2}$ ，如图所示



$AF_1 // BF_2$, 延长 AB , 交 x 轴于 D ,

令 $D(x_0, 0)$,

由 $\triangle DBF_2 \sim \triangle DAF_1$, $DF_2 = x_0 - c$, $DF_1 = x_0 + c$, 可得

$$\frac{BF_2}{AF_1} = \frac{x_0 - c}{x_0 + c} = \frac{1}{4},$$

可得 $x_0 = \frac{5}{3}c$,

存在 A 、 B 两点, 使得 $\vec{AF_1} = 4\vec{BF_2}$, 等价于过 D 点做直线与椭圆上半部分或下半部分交于两点,

即 D 点在椭圆外, 可得 $\frac{5}{3}c > a$, 则 $\frac{c}{a} > \frac{3}{5}$,

则该椭圆的离心率的取值范围是 $(\frac{3}{5}, 1)$.

故答案为 $(\frac{3}{5}, 1)$.

56. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 若椭圆上存在点 P , 使得 $\frac{|PF_1|}{|PF_2|} = e$, 则

椭圆离心率的取值范围为_____.

【答案】 $[\sqrt{2} - 1, 1)$

【解析】 【分析】

本题考查椭圆的性质, 由 $\frac{|PF_1|}{|PF_2|} = e$ 结合椭圆离心率的定义可得 $\frac{PF_1}{PF_2} + 1 = \frac{PF_1 + PF_2}{PF_2} = \frac{2a}{PF_2} = e + 1$, 可求

得 $PF_2 = \frac{2a}{e+1}$, 而 $a - c \leq PF_2 \leq a + c$, 从而可求得离心率 e 的取值范围.

【解答】

解：依题意，得 $\frac{PF_1}{PF_2} + 1 = \frac{PF_1 + PF_2}{PF_2} = \frac{2a}{PF_2} = e + 1$,

$\therefore PF_2 = \frac{2a}{e+1}$, 又 $a - c \leq PF_2 \leq a + c$, $\therefore a - c \leq \frac{2a}{e+1} \leq a + c$, 不等号两端同除以 a 得,

$$1 - e \leq \frac{2}{e+1} \leq 1 + e, \therefore \begin{cases} 1 - e^2 \leq 2 \\ 1 + e \geq \sqrt{2} \end{cases}, \text{解得 } e \geq \sqrt{2} - 1,$$

又 $0 < e < 1$, $\therefore \sqrt{2} - 1 \leq e < 1$.

故答案为 $[\sqrt{2} - 1, 1)$.

57. 设椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个焦点为 $F(1, 0)$, 点 $A(-1, 1)$ 为椭圆 E 内一点, 若椭圆 E 上存在一点 P , 使得 $|PA| + |PF| = 7$, 则椭圆 E 的离心率的取值范围是_____.

【答案】 $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right]$

【解析】 【解答】

解：设 $F'(-1, 0)$, 则 $|PF'| + |PF| = 2a$,

$$\text{即 } |PF| = 2a - |PF'|,$$

又椭圆 E 上存在一点 P 使得 $|PA| + |PF| = 7$,

$$\therefore |PA| + |PF| = |PA| + 2a - |PF'| = 7,$$

$$\text{即 } |PA| - |PF'| = 7 - 2a,$$

$$\therefore -|AF'| \leq |PA| - |PF'| \leq |AF'|,$$

$$\therefore -1 \leq |PA| - |PF'| \leq 1,$$

$$\text{即 } -1 \leq 7 - 2a \leq 1, \text{ 解得 } 3 \leq a \leq 4,$$

$$\therefore c = 1,$$

$$\therefore \frac{1}{4} \leq e \leq \frac{1}{3},$$

故答案为 $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right]$.

【分析】

本题考查了椭圆的性质及几何意义, 利用椭圆的性质及离心率的概念计算得结论.

