

抛物线的标准方程与几何性质探析

知识点：

1. 抛物线的定义
2. 抛物线的标准方程
3. 抛物线的几何性质及其应用
4. 直线与抛物线的位置关系

小题热身：

1. 已知抛物线的顶点是原点，对称轴为坐标轴，并且经过点 $P(-2, -4)$ ，则该抛物线的标准方程为_____.

答案： $y^2 = -8x$ 或 $x^2 = -y$

2. 抛物线 $x^2 = 8y$ 的准线被圆 $x^2 + y^2 - 6x = 0$ 截得的线段长为 ()

- A. 4 B. $2\sqrt{5}$ C. $\sqrt{5}$ D. 2

【答案】B

3. 抛物线 $x^2 = -\frac{1}{2}y$ 的焦点坐标是 ()

- A. $\left(0, -\frac{1}{4}\right)$ B. $\left(0, -\frac{1}{8}\right)$ C. $\left(0, \frac{1}{8}\right)$ D. $\left(0, \frac{1}{4}\right)$

【答案】B

4. 设 P 是抛物线 $y^2 = 4x$ 上的一个动点，若 $B(3, 2)$ ，则 $|PB| + |PF|$ 的最小值为_____.

答案 4

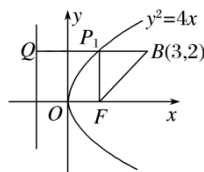
解析 如图，过点 B 作 BQ 垂直准线于点 Q ，

交抛物线于点 P ，

则 $|PQ| = |PF|$ 。

则有 $|PB| + |PF| \geq |PB| + |PQ| = |BQ| = 4$ ，

即 $|PB| + |PF|$ 的最小值为 4。



5. 直线 l 经过抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点，且与抛物线交于 A, B 两点，若 AB 中点的横坐标为 3，则线段 AB 的长为 ()

- A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

解析：设抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F ，准线为 l_0 ， $A(x_A, y_A)$ ， $B(x_B, y_B)$ ， C 是 AB 的中点，其坐标为 (x_C, y_C) ，分别过点 A, B 作直线 l_0 的垂线，垂足分别为 M, N ，由抛物线的定义得 $|AB| = |AF| + |BF| = |AM| + |BN| = x_A + 1 + x_B + 1 = x_A + x_B + 2 = 2x_C + 2 = 8$ 。

答案：D

6. 《九章算术》是我国古代内容极为丰富的数学名著，第九章“勾股”，讲述了“勾股定理”及一些应用．直角三角形的两直角边与斜边的长分别称“勾”“股”“弦”，且“勾²+股²=弦²”，设直线 l 交抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2$ 于 A, B 两点，若 $|OA|, |OB|$ 恰好是 $\text{Rt}\triangle OAB$ 的“勾”“股”（ O 为坐标原点），则此直线 l 恒过定点（ ）
- A. $(\frac{1}{4}, 0)$ B. $(\frac{1}{2}, 0)$ C. $(0, 2)$ D. $(0, 4)$

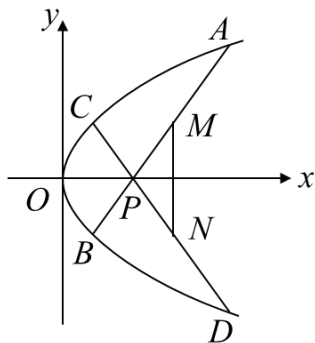
【分析】设直线 $l: y=mx+b$ ，代入抛物线 $x^2=4y$ ，利用韦达定理及向量数量积公式即可得到结论．

【解答】解：设直线 $l: y=mx+b$ ，（ $b \neq 0$ ），代入抛物线 $x^2=4y$ ，可得 $x^2 - 4mx - 4b = 0$ ．
设 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，则 $x_1+x_2=4m$ ， $x_1x_2=-4b$ ，
 $\therefore x_1^2x_2^2=16y_1y_2=16b^2$ ， $\therefore y_1y_2=b^2$ ，
 $\because OA \perp OB$ ， $\therefore x_1x_2+y_1y_2=0$ ，
可得 $b^2 - 4b = 0$ ，
 $\because b \neq 0$ ， $\therefore b = 4$ ， $\therefore$ 直线 $l: y=mx+4$ ，
 $\therefore$ 直线 l 过定点 $(0, 4)$ ．
故选：D．

例题讲解：

例 1. 如图，已知抛物线 $y^2 = 4x$ ，过点 $P(2,0)$ 作斜率分别为 k_1, k_2 的两条直线，与抛物线相交于点 A, B 和 C, D ，且 M, N 分别是 AB, CD 的中点

- (1) 若 $k_1+k_2=0$ ， $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PB}$ ，求线段 MN 的长；
(2) 若 $k_1k_2=-1$ ，求 $\triangle PMN$ 面积的最小值．



答案：① 2；② 4

例 2. 如图, 椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, x 轴被曲线 $C_2: y = x^2 - b$ 截

得的线段长等于 C_1 的长半轴长

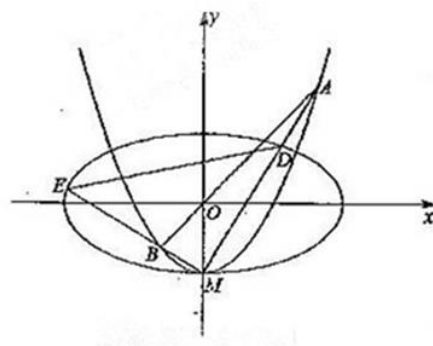
(1) 求 C_1, C_2 的方程;

(2) 设 C_2 与 y 轴的焦点为 M , 过坐标原点 O 的直线 l 与 C_2 相交于点 A, B , 直线 MA, MB 分别与 C_1 相交与 D, E .

(i) 证明: $MD \perp ME$;

(ii) 记 $\triangle MAB, \triangle MDE$ 的面积分别是 S_1, S_2 . 问: 是否存在

直线 l , 使得 $\frac{S_1}{S_2} = \frac{17}{32}$? 请说明理由.



答案: ① $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1, y = x^2 - 1$. ② (i) 证明略; (ii) $y = \frac{3}{2}x$ 和 $y = -\frac{3}{2}x$.

巩固练习:

1. 若动圆与圆 $(x-2)^2 + y^2 = 1$ 外切, 与直线 $x = -1$ 相切, 则动圆圆心轨迹方程是 ()

A. $y^2 = 8x$ B. $y^2 = -8x$ C. $y^2 = 4x$ D. $y^2 = -4x$

2. 已知抛物线 C 的顶点是原点 O , 焦点 F 在 x 轴的正半轴上, 经过点 F 的直线与抛物线 C 交于 A, B 两点, 若 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -12$, 则抛物线 C 的方程为 ()

A. $x^2 = 8y$ B. $x^2 = 4y$

C. $y^2 = 8x$ D. $y^2 = 4x$

【素养指导】 设出 A, B 坐标 $\rightarrow$ 数量积运算 $\rightarrow$ 活用结论 $\rightarrow$ 确定 p 的值 $\rightarrow$ 求抛物线方程

【答案】 C

【解析】 设抛物线为 $y^2 = 2px$, 直线 $AB: x = my + \frac{p}{2}$, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $y_1 + y_2 = 2pm, y_1 y_2 = -p^2$,

得 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x_1 x_2 + y_1 y_2 = \frac{p^2}{4} - p^2 = -\frac{3}{4}p^2 = -12$, 得 $p = 4$ (舍负),

即抛物线 C 的方程为 $y^2 = 8x$, 故选 C

3. 已知抛物线 $y^2 = 4x$ 上一点 P 到准线的距离为 d_1 , 到直线 $l: 4x - 3y + 16 = 0$ 为 d_2 , 则

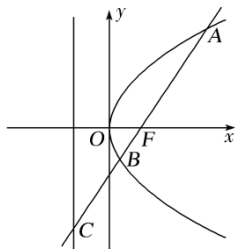
$d_1 + d_2$ 的最小值为 ()

A. 3

B. 4

C. $\sqrt{5}$ D. $\sqrt{7}$

4. 如图, 过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 的直线交抛物线于点 A, B , 交其准线 l 于点 C , 若 F 是 AC 的中点, 且 $|AF|=4$, 则线段 AB 的长为()



A. 5

B. 6

C. $\frac{16}{3}$ D. $\frac{20}{3}$

【答案】C

【解析】如图, $|AD|=|AF|=\frac{1}{2}|AC|=4, |OF|=\frac{p}{2}=4\times\frac{1}{4}=1, \therefore p=2$, 因为

$$\frac{1}{|AF|} + \frac{1}{|BF|} = \frac{1}{|OF|}, \quad |AF|=4, \text{ 所以 } |BF|=\frac{4}{3}, \text{ 所以 } |AB|=|AF|+|BF|=4+\frac{4}{3}=$$

$$\frac{16}{3}.$$

5. (多选题) 过点 $(0,1)$ 的直线 l 与抛物线 $y^2=x$ 只有一个公共点, 则直线 l 的方程可为()

A. $x=0$ B. $y=1$ C. $y=\frac{1}{2}x+1$ D. $y=\frac{1}{4}x+1$

5. ABD

6. (多选题) 已知抛物线 $C: y^2=2x$, 经过点 $P(4,1)$ 的直线 l 与抛物线 C 相交于 A, B 两点, 且点 P 恰为 AB 的中点, F 为抛物线的焦点, 则下列结论正确的是()

A. 抛物线的准线方程为 $x=-\frac{1}{2}$ B. $|\overrightarrow{AF}|+|\overrightarrow{BF}|$ 的值为 8C. 直线 AB 的倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$ D. $\triangle ABF$ 的面积为 $\frac{5\sqrt{7}}{2}$

6. ACD

7. 椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的右焦点为 F , 以点 F 为焦点的抛物线的标准方程是_____.

【答案】 $y^2=4\sqrt{3}x$

8. 抛物线 $C: y^2 = 4x$ 上一点 Q 到点 $B(4,1)$ 与到焦点 F 的距离和最小, 则点 Q 的坐标是_____.

【答案】 $\left(\frac{1}{4}, 1\right)$

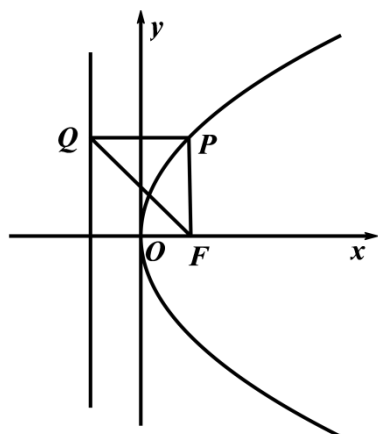
9. F 是抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点, P 是 C 上且位于第一象限内的点, 点 P 在 C 的准线上的射影为 Q , 且 $|PQ| = 2$, 则 $\triangle PQF$ 外接圆的方程为_____.

【解析】

【分析】

由题可判断 $\triangle FPQ$ 为直角三角形, 即 $\triangle PQF$ 外接圆的圆心为 FQ 中点, 求出圆心和半径即可写出圆的方程.

【详解】



由抛物线方程可知焦点 $F(1,0)$, 准线方程为 $x = -1$,

$\because |PQ| = 2, \therefore x_P + 1 = 2$, 即 $x_P = 1$, 则 $y_P = 2$,

$\therefore P(1,2), Q(-1,2)$,

$\therefore FP \perp PQ$, 即 $\triangle FPQ$ 为直角三角形,

$\therefore \triangle PQF$ 外接圆的圆心为 FQ 中点, 即圆心为 $(0,1)$, 半径为 $\frac{1}{2}|FQ| = \sqrt{2}$,

$\therefore \triangle PQF$ 外接圆的方程为 $x^2 + (y-1)^2 = 2$.

故答案为: $x^2 + (y-1)^2 = 2$.

10 过抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点 F 的直线交抛物线于 A, B 两点, 点 O 是坐标原点, 若 $|AF| = 3$, 则 $\triangle AOB$ 的面积为_____.

解析 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ($y_1 > 0, y_2 < 0$), 如图所示, $|AF| = x_1 + 1 = 3$,

所以 $x_1 = 2, y_1 = 2\sqrt{2}$.

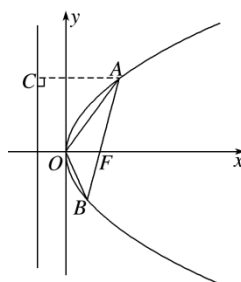
设 AB 的方程为 $x - 1 = ty$,

$$\text{由} \begin{cases} y^2 = 4x, \\ x - 1 = ty, \end{cases} \quad \text{消去 } x,$$

$$\text{得 } y^2 - 4ty - 4 = 0.$$

$$\text{所以 } y_1 y_2 = -4. \text{ 所以 } y_2 = -\sqrt{2}, x_2 = \frac{1}{2},$$

$$\text{所以 } S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \times 1 \times |y_1 - y_2| = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$



11. 已知抛物线 $x^2 = 4y$, 过点 $P(4, 2)$ 作斜率为 k 的直线 l 与抛物线交于不同的两点 M, N .

(1) 求 k 的取值范围;

(2) 若 $\triangle OMN$ 为直角三角形, 且 $OM \perp ON$, 求 k 的值.

答案: ① $k > 2 + \sqrt{2}$ 或 $k < 2 - \sqrt{2}$; ② $k = -\frac{1}{2}$

12. 已知定点 $F(1, 0)$, 曲线 C 上任意一点 $P(x, y)$ ($x \geq 0$) 到定点 $F(1, 0)$ 的距离比它到 y 轴的距离大 1.

(1) 求曲线 C 的方程;

(2) 过 F 作两条互相垂直的直线 l_1, l_2 , 直线 l_1 与 C 交于 A, B 两点, 直线 l_2 与 C 交于 D, E 两点, 求 $|AB| + |DE|$ 的最小值

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), D(x_3, y_3), E(x_4, y_4)$, 直线 l_1 的方程为 $y = k_1(x - 1)$, 联立方程

$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ y = k_1(x - 1) \end{cases}, \text{ 得 } k_1^2 x^2 - 2k_1^2 x - 4 + k_1^2 = 0, \therefore x_1 + x_2 = -\frac{-2k_1^2 - 4}{k_1^2} = \frac{2k_1^2 + 4}{k_1^2}, \text{ 同理}$$

直线 l_2 与抛物线的交点满足 $x_3 + x_4 = \frac{2k_2^2 + 4}{k_2^2}$, 由抛物线定义可知

$$|AB| + |DE| = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2p =$$

$$\frac{2k_1^2+4}{k_1^2} + \frac{2k_2^2+4}{k_2^2} + 4 = \frac{4}{k_1^2} + \frac{4}{k_2^2} + 8 \geq 2\sqrt{\frac{16}{k_1^2 k_2^2}} + 8 = 16, \text{ 当且仅当 } k_1 = -k_2 = 1 \text{ (或}$$

$-1)$ 时, 取等号.

点睛:对于抛物线弦长问题, 要重点抓住抛物线定义, 到定点的距离要想到转化到准线上, 另外, 直线与抛物线联立, 求判别式, 利用根与系数的关系是通法, 需要重点掌握. 考查最值问题时要能想到用函数方法和基本不等式进行解决. 此题还可以利用弦长的倾斜角表示, 设直线的倾斜角为 α , 则

$$|AB| = \frac{2p}{\sin^2 \alpha}, \text{ 则 } |DE| = \frac{2p}{\sin^2(\alpha + \frac{\pi}{2})} = \frac{2p}{\cos^2 \alpha}, \text{ 所以}$$

$$|AB| + |DE| = \frac{2p}{\cos^2 \alpha} + \frac{2p}{\sin^2 \alpha} = 4\left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \alpha}\right)$$

$$= 4\left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \alpha}\right)(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = 4\left(2 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}\right) \geq 4 \times (2 + 2) = 16$$