

班级_____ 姓名_____ 学号_____ 日期_____

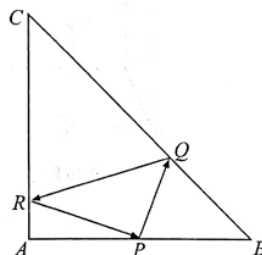
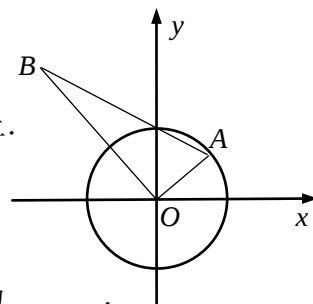
一、填空题：

1. 若全集 $U = \mathbb{R}$ ，集合 $A = \{x | x+1 < 0\}$, $B = \{x | 2^x - 8 < 0\}$ ，则集合 $(C_U A) \cap B =$ _____.
2. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知 $y = \sqrt{3}x$ 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的一条渐近线方程，则此双曲线的离心率为_____.
3. 如果复数 $z = \frac{3-bi}{2+i}$ ($b \in \mathbb{R}$) 的实部和虚部相等，则 $|z|$ 等于_____.
4. 如图是一个算法的伪代码，其输出的结果为_____.
5. 将一颗质地均匀的正四面体骰子（四个面上分别写有数字 1, 2, 3, 4）先后抛掷 2 次，观察其朝下一面的数字，则两次数之和为偶数的概率为_____.
6. 已知正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB=3$ ， $AA_1=2$ ， P ， M 分别为 BD_1 ， B_1C_1 上的点.
若 $\frac{BP}{PD_1} = \frac{1}{2}$ ，则三棱锥 $M-PBC$ 的体积为_____.
7. 已知函数 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的奇函数，当 $x \geq 0$ 时， $f(x) = 2^x + m$ (m 为常数)，则 $f(\log_2 2)$ 的值为_____.
8. 已知角 φ 的终边经过点 $P(1, -2)$ ，函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$) 图象的相邻两条对称轴之间的距离等于 $\frac{\pi}{3}$ ，则 $f\left(\frac{\pi}{12}\right)$ 的值为_____.
9. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，点 $A(\sqrt{3}, 1)$ 在以原点 O 为圆心的圆上. 已知圆 O 与 y 轴正半轴的交点为 P ，延长 AP 至点 B ，使得 $\angle AOB = 90^\circ$ ，则 $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{OA} =$ _____.
10. 已知函数 $f(x) = e^x(x^2 + ax + 1)$ 的单调减区间为 $\left(\ln \frac{b}{e}, \ln \frac{a}{e}\right)$ ，则 $\frac{a}{b}$ 的值为_____.
11. 如图，已知 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，其中 $\angle BAC = 90^\circ$ ，且 $AB = 2$ ，光线从 AB 边上的中点 P 出发，经 BC ， CA 反射后又回到点 P （反射点分别为 Q ， R ），则光线经过的路径总长 $PQ + QR + RP =$ _____.

```

S ← 0
For i From 1 To 10
    S ← S + 1/(i(i+1))
End For
Print S

```



12. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知直线 $l_1: y = mx$ 与曲线 $f(x) = 2x^3 + x$ 从左至右依次交于 A、B、C 三点, 若直线 $l_2: y = kx + 2$ 上存在 P 满足 $|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC}| = 1$, 则实数 k 的取值范围是_____.

二、解答题：

1. 在 $\triangle ABC$ 中, $\tan A = -3\tan B$, $b \cos C + c \cos B = \sqrt{3}b$.

(1) 求角 C 的大小;

(2) 设 $f(x) = \sin(x + A) + \cos^2(\frac{x+B}{2})$, 其中 $x \in [0, \frac{5\pi}{6}]$, 求 $f(x)$ 取值范围.

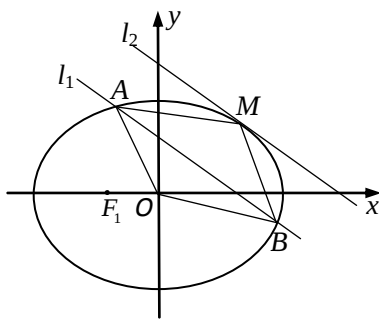
2. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$, 且左焦点 F_1 到左准线的距离为 4.

(1) 求椭圆 C 的方程;

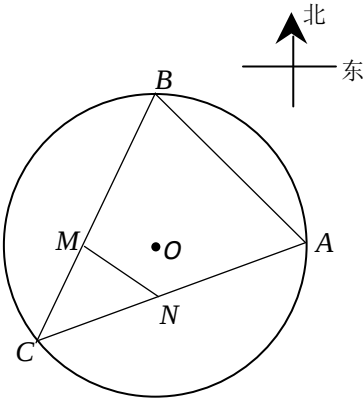
(2) 若与原点距离为 1 的直线 $l_1: y = kx + m$ 与椭圆 C 相交于 A, B 两点, 直线 l_2 与 l_1 平行, 且与椭圆 C 相切于点 M (O, M 位于直线 l_1 的两侧).

记 $\triangle MAB$, $\triangle OAB$ 的面积分别为 S_1, S_2 ,

若 $S_1 = \lambda S_2$, 求实数 λ 的取值范围.



3. 某鲜花小镇圈定一块半径为 1 百米的圆形荒地，准备建成各种不同鲜花景观带. 为了便于游客观赏，准备修建三条道路 AB , BC , CA ，其中 A , B , C 分别为圆上的三个进出口，且 A , B 分别在圆心 O 的正东方向与正北方向上， C 在圆心 O 南偏西某一方向上. 在道路 AC 与 BC 之间修建一条直线型水渠 MN 种植水生观赏植物黄鸢尾（其中点 M , N 分别在 BC 和 CA 上，且 M 在圆心 O 的正西方向上， N 在圆心 O 的正南方向上），并在区域 MNC 内种植柳叶马鞭草.



- (1) 求水渠 MN 长度的最小值；
- (2) 求种植柳叶马鞭草区域 MNC 面积的最大值（水渠宽度忽略不计）.

三、附加题：

1. 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, 求 $(AB)^{-1}$.

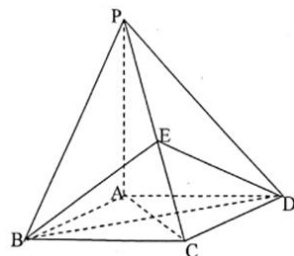
2. 已知极坐标系的极点与直角坐标系的原点重合，极轴与 x 轴的正半轴重合. 若直线 l 的参数方程

为 $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t \end{cases}$ (t 为参数), 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 2$, 求曲线 C 被直线 l 截得的弦长.

3. 四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 面 $ABCD$, 底面 $ABCD$ 为菱形, 且有 $AB = 1$, $AP = \sqrt{2}$, $\angle BAD = 120^\circ$, E 是线段 PC 上一点.

(1) 求 AC 与 PB 所成角的余弦值;

(2) 若二面角 $E-AB-C$ 的平面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{33}}{11}$, 求 $\frac{PE}{PC}$ 的值.



江苏省仪征中学 2019 届高三年级下学期 3 月份冲刺二模热身训练 2 答案:

一、填空题:

1. $[-1, 3)$; 2. 2; 3. $3\sqrt{2}$; 4. $\frac{10}{11}$; 5. $\frac{1}{2}$; 6. 1; 7. -2; 8. $-\frac{\sqrt{10}}{10}$; 9. 2;
10. e; 11. $\sqrt{10}$; 12. $k \leq -\sqrt{15}$, 或 $k \geq \sqrt{15}$.

二、解答题

1. (1) 因为 $\tan A = -3 \tan B$

$$\text{所以 } \sin A \cos B = -3 \sin B \cos A$$

$$\text{所以 } 2c^2 = a^2 - b^2 \quad (1)$$

$$\text{又因为 } b \cos C + c \cos B = \sqrt{3}b$$

$$\text{所以 } a = \sqrt{3}b \quad (2)$$

由 (1), (2) 得

$$c = b = \sqrt{3}a$$

由余弦定理得

$$\cos C = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

因为 $C \in (0, \pi)$

$$\text{所以 } C = \frac{\pi}{6} \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned} (2) f(x) &= \frac{3\sqrt{3}}{4} \cos x - \frac{3}{4} \sin x + \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{因为 } x \in \left[0, \frac{5}{6}\pi\right]$$

$$\text{所以 } x + \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{6}, \pi\right]$$

$$\text{所以 } f(x) \text{ 取值范围为 } \left[-1, \frac{3\sqrt{3}+2}{4}\right]. \quad \dots\dots\dots 14 \text{ 分}$$

2. 【解】(1) 因为椭圆 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$, 所以 $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{5}$,

又椭圆 C 的左焦点 F_1 到左准线的距离为 4,

$$\text{所以 } -c - \left(-\frac{a^2}{c}\right) = 4, \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } a^2 = 5, c = 1, b^2 = a^2 - c^2 = 4,$$

$$\text{所以椭圆 C 的方程为 } \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1. \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(2) 因为原点与直线 $l_1: y = kx + m$ 的距离为 1,

所以 $\frac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}=1$, 即 $|m|=\sqrt{k^2+1}$. …… 6 分

设直线 $l_2: y=kx+n$,

$$\text{由} \begin{cases} y=kx+n, \\ \frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1 \end{cases} \text{得 } (4+5k^2)x^2+10knx+5n^2-20=0,$$

因为直线 l_2 与椭圆 C 相切,

$$\text{所以 } \Delta=(-10kn)^2-4(4+5k^2)(5n^2-20)=0,$$

$$\text{整理得 } n^2=5k^2+4. \quad \text{…… 8 分}$$

$$\text{因为直线 } l_1 \text{ 与直线 } l_2 \text{ 之间的距离 } d=\frac{|m-n|}{\sqrt{k^2+1}},$$

$$\text{所以 } S_1=\frac{1}{2}AB \cdot d, \quad S_2=\frac{1}{2}AB \cdot 1,$$

$$\text{所以 } \lambda=\frac{S_1}{S_2}=\frac{|m-n|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{|m-n|}{|m|}=|1-\frac{n}{m}|. \quad \text{……10 分}$$

$$\text{又 } \left(\frac{n}{m}\right)^2=\frac{5k^2+4}{k^2+1}=5-\frac{1}{k^2+1},$$

$$\text{因为 } k^2 \geq 0, \text{ 所以 } \left(\frac{n}{m}\right)^2 \in [4, 5).$$

$$\text{又 } O, M \text{ 位于直线 } l_1 \text{ 的两侧, 所以 } m, n \text{ 同号, 所以 } \frac{n}{m} \in [2, \sqrt{5}),$$

$$\text{所以 } |1-\frac{n}{m}| \in [1, \sqrt{5}-1),$$

故实数 λ 的取值范围为 $[1, \sqrt{5}-1)$. ……14 分

3. 【解】(1) 以圆心 O 为原点, 建立平面直角坐标系, 则圆 O 的方程为 $x^2+y^2=1$,

$$\text{设点 } C(\cos \theta, \sin \theta), \quad \theta \in (\pi, \frac{3\pi}{2}). \quad \text{…… 2 分}$$

$$\text{直线 } AC \text{ 的方程为 } y=\frac{\sin \theta}{\cos \theta-1}(x-1), \text{ 令 } x=0, \text{ 得 } N(0, \frac{\sin \theta}{1-\cos \theta}).$$

$$\text{直线 } BC \text{ 的方程为 } y=\frac{1-\sin \theta}{-\cos \theta} \cdot x+1, \text{ 令 } y=0, \text{ 得 } M(\frac{\cos \theta}{1-\sin \theta}, 0).$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } MN^2 &= \left(\frac{x_0}{1-y_0}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{1-x_0}\right)^2 = \left(\frac{\cos \theta}{1-\sin \theta}\right)^2 + \left(\frac{\sin \theta}{1-\cos \theta}\right)^2 \\ &= \frac{1+\sin \theta}{1-\sin \theta} + \frac{1+\cos \theta}{1-\cos \theta}. \end{aligned} \quad \text{…… 4 分}$$

$$\text{令 } f(\theta)=\frac{1+\sin \theta}{1-\sin \theta}+\frac{1+\cos \theta}{1-\cos \theta}, \quad \theta \in (\pi, \frac{3\pi}{2}),$$

$$\text{即 } f(\theta) = -2 + \frac{1}{1-\sin\theta} + \frac{1}{1-\cos\theta}, \quad \theta \in (\pi, \frac{3\pi}{2}),$$

$$\text{则 } f'(\theta) = \frac{(\cos\theta - \sin\theta)(2 + \sin\theta\cos\theta - 2\sin\theta - 2\cos\theta)}{(1-\sin\theta)^2(1-\cos\theta)^2},$$

$$\text{令 } f'(\theta) = 0, \text{ 得 } \theta = \frac{5\pi}{4}. \quad \dots\dots 6 \text{ 分}$$

当 $\theta \in (\pi, \frac{5\pi}{4})$ 时, $f'(\theta) < 0$, 则 $f(\theta)$ 单调递减;

当 $\theta \in (\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2})$ 时, $f'(\theta) > 0$, 则 $f(\theta)$ 单调递增;

所以当 $\theta = \frac{5\pi}{4}$ 时, $f(\theta)_{\min} = 6 - 4\sqrt{2}$.

所以 $MN_{\min} = 2 - \sqrt{2}$.

答: 水渠 MN 长度的最小值为 $2 - \sqrt{2}$ 百米. \dots\dots 8 \text{ 分}

(2) 由 (1) 可知, $M(\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}, 0)$, $N(0, \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta})$,

$$\begin{aligned} \text{则 } S_{\triangle CMN} &= S_{\triangle CMO} + S_{\triangle CNO} - \frac{1}{2} OM \cdot ON \\ &= \frac{1}{2} \sin\theta \cos\theta \cdot \frac{1-\sin\theta-\cos\theta}{(1-\sin\theta)(1-\cos\theta)}. \end{aligned} \quad \dots\dots 12 \text{ 分}$$

设 $t = \sin\theta + \cos\theta$, 因为 $\theta \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$, 所以 $-\sqrt{2} \leq t < -1$.

所以 $S_{\triangle CMN} = -\frac{t+1}{2}$, $-\sqrt{2} \leq t < -1$.

所以当 $t = -\sqrt{2}$ 时, $(S_{\triangle CMN})_{\max} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$.

答: 种植柳叶马鞭草区域 MNC 面积的最大值为 $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ 平方百米. \dots\dots 16 \text{ 分}

另法: (2) 因为 $\angle AOB = 90^\circ$, 所以 $\angle ACB = 45^\circ$, \dots\dots 10 \text{ 分}

$$\text{由 } CM = \sqrt{(\cos\theta - \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta})^2 + \sin^2\theta} = \sqrt{\frac{2\sin^2\theta}{1-\sin\theta}},$$

$$CN = \sqrt{\cos^2\theta + (\sin\theta - \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta})^2} = \sqrt{\frac{2\cos^2\theta}{1-\cos\theta}}$$

$$\text{所以 } S_{\triangle CMN} = \frac{1}{2} CM \cdot CN \cdot \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \sqrt{\frac{2\sin^2\theta}{1-\sin\theta}} \cdot \sqrt{\frac{2\cos^2\theta}{1-\cos\theta}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{(1+\sin\theta)(1+\cos\theta)}. \quad \dots\dots 12 \text{ 分}$$

设 $t = \sin\theta + \cos\theta$, 因为 $\theta \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$, 所以 $-\sqrt{2} \leq t < -1$.

所以 $S_{\triangle CMN} = -\frac{t+1}{2}$, $-\sqrt{2} \leq t < -1$. 下同.

三、附加题:

$$1. AB = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} (AB)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

2. 因为 $\rho = 2$ 所以 $x^2 + y^2 = 4$, 直线 $2x - y - 2 = 0$, 圆心到直线的距离是 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$, 所以弦长是

$$\frac{8\sqrt{5}}{5} \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

3. (1) 过 A 作 $AM \perp AD$

$PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AD \subset$ 平面 $ABCD$ 所以 $PA \perp AD$ 同理 $PA \perp AM$

以 AM, AD, AP 为基底如图建立空间直角坐标系 xoy , 则 $A(0,0,0)$, $B(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$, $C(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0)$,

$$P(0,0,\sqrt{2}), \overrightarrow{AC} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0), \overrightarrow{BP} = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{2})$$

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BP}}{|\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{BP}|} = -\frac{\sqrt{3}}{6} \text{ 所以 } AC \text{ 与 } PB \text{ 所成角的余弦值为 } \frac{\sqrt{3}}{6} \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

(2) 设 $\overrightarrow{PE} = \lambda \overrightarrow{PC} (\lambda \in (0,1))$

平面 ABC 的一个法向量 $\overline{n_1} = (0,0,1)$,

设平面 ABE 的一个法向量为 $\overline{n_2} = (x,y,z)$ 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overline{n_2} = 0$, $\overrightarrow{AE} \cdot \overline{n_2} = 0$

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda x + \frac{1}{2}\lambda y + (\sqrt{2} - \sqrt{2}\lambda)z = 0 \end{cases} \quad \text{令 } x=1, y=\sqrt{3}, z=\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2}\lambda}$$

$$\text{因为 } \frac{\left| \frac{-\sqrt{3}\lambda}{\sqrt{2}-\sqrt{2}\lambda} \right|}{\sqrt{4 + \frac{(\sqrt{3}\lambda)^2}{(\sqrt{2}-\sqrt{2}\lambda)^2}}} = \frac{\sqrt{33}}{11}$$

$$16\lambda - 8 = 0$$

$$\lambda = \frac{1}{2}$$

$$\text{所以 } \frac{PE}{PC} = \frac{1}{2}$$

